離心率を見よう

松田　康雄（まつだ　やすお）

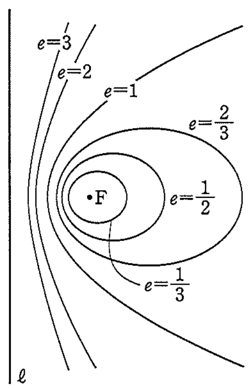
§0. はじめに

定直線 ℓ と定点Fからの距離の比が $1:e\ (e>0)$ の点の軌跡は「離心率 e の2次曲線」と呼ばれ，Fは焦点（の1つ），ℓ は準線と呼ばれる。

$0<e<1$ のときは楕円，$e=1$ のときは放物線，$e>1$ のときは双曲線

となる。特に，$e=0$ のとき円と定義する。

e は2次曲線の形を表す指標である。具体的に見ると図1のようになる。



（図1）　離心率と2次曲線

本稿では，楕円に注目する。e が0に近いほど円に近く，1に近づくにつれて細長くなる。

楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0) \qquad ①$$

の離心率 e は

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \qquad ②$$

で与えられる。焦点は $(ae,\ 0)$ と $(-ae,\ 0)$，準線は $x=\pm\frac{a}{e}$ で与えられる。

本稿では

Ⅰ．楕円①のグラフから離心率 e を見る方法

Ⅱ．離心率 e と正の定数 a が与えられたとき，定数 b が定まり，楕円①の形が決定される方法

を述べる。

§1. 楕円のグラフから離心率を見る

次の定理が成り立つ。

【定理】　点 $(0,\ a)$ から楕円①に接線を引く。

(1)　接線の傾きの絶対値が離心率 e である。

(2)　接点から x 軸に下ろした垂線の足が焦点である。

(3)　接線と x 軸との交点を通り x 軸に垂直な直線が準線である。

【補題】　楕円①の方程式は②の離心率 e を用いて次のように表される：

$$(1-e^2)x^2+y^2=a^2(1-e^2) \qquad ③$$

（証明略）

定理の証明　点 $(0,\ a)$ から③に引いた接線の方程式を $y=mx+a$ とおく。③に代入してできる x の2次方程式は

$$(1-e^2+m^2)x^2+2amx+a^2e^2=0 \qquad ④$$

となる。重解をもつので判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4}=a^2m^2-(1-e^2+m^2)a^2e^2$$
$$=a^2(e^2-m^2)(e^2-1)=0$$

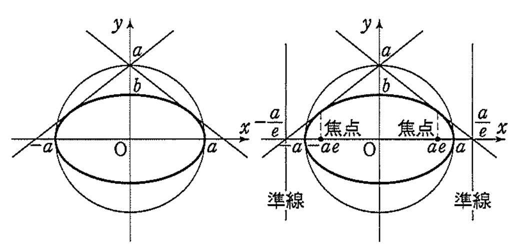
$a\neq0$，$e\neq\pm1$ なので $m^2=e^2$ より $|m|=e$ となる。

$m=\pm e$ のとき2次方程式④は

$$x^2\pm2aex+a^2e^2=0,\ (x\pm ae)^2=0$$

となって $x=\mp ae$ なので，接点から x 軸に下ろした垂線の足が焦点である。

接線の方程式は $y=\pm ex+a$ であるから，$e\neq0$ より，接線と x 軸との交点の x 軸標は $x=\mp\frac{a}{e}$ である。（以上複号同順）この点を通り x 軸に垂直な直線は準線である。■



（図2）　楕円の離心率を見る

§ 2. 離心率から楕円の形を決める

予め離心率 e と正の定数 a が与えられているとする。次の手順によって正の定数 b が定まり，楕円①の形が決定される。

手順

(1) 原点中心半径 a の円 O をかき，点 $(0,\ a)$ から傾き $-e$ の直線 ℓ を引く。

(2) 原点から ℓ に垂直な直線を引き，直線 $y=a$ との交点（A とする）から x 軸に垂線を下ろす。この垂線の足（F とする）が焦点である。また直線 ℓ と直線 AF の交点が，①と直線 ℓ の接点である。

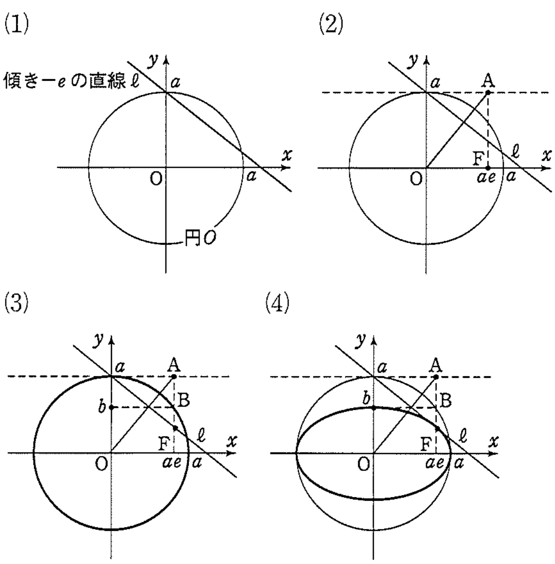
(3) 円 O と(2)の垂線との交点（B とする）から y 軸に垂線を下ろす。この垂線の足が点 $(0,\ b)$ で楕円の頂点である。

(4) 定数 b，さらに ℓ との接点も定まり，楕円①の形が決定される。

補足 (2) 直線 OA は $y=\dfrac{1}{e}x$ であるから

A$(ae,\ a)$，F$(ae,\ 0)$ である。

(3) △OFB において OB$=a$，OF$=ae$ であるから BF$=b$



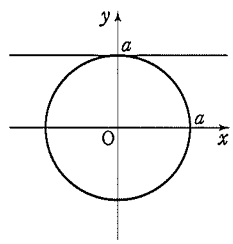
（図 3） 離心率 e と定数 a から楕円①の形を決定する

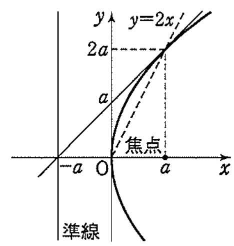
§ 3. 他の 2 次曲線の離心率 e を見る

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ の離心率 e は $e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ で与えられ，焦点，準線および③は楕円と同じである。定理も同様に成り立ち，手順もほぼ同様に成り立つ。

円 $x^2+y^2=a^2$ の場合，点 $(0,\ a)$ における接線の方程式は $y=a$ で，その傾き 0 は円の離心率 $e=0$ と同じである。円の焦点を円の中心とみなし，準線は存在しないとすれば，円の場合も定理 1 が成り立つ。

放物線 $y^2=4ax$ の場合。$y=2x$ との交点 $(a,\ 2a)$ から y 軸に下ろした垂線の足と原点の中点が $(0,\ a)$ である。この点から引いた接線の方程式は $y=x+a$ で，その傾き 1 は放物線の離心率 $e=1$ と同じである。定理および手順は放物線の場合も成り立つ。





（図 4） 円の離心率 $e=0$ （図 5） 放物線の離心率 $e=1$

§ 4. おわりに

離心率 e は 2 次曲線の形を表す指標である。1，2 によって 2 次曲線から離心率，逆に離心率から 2 次曲線がある程度見えるようになったと思う。今後，授業の中で使えるような教材化を工夫したい。

《参考文献》

〔1〕「離心率を感じる」松田康雄 日本数学協会 論文集 第 3 号 日本数学協会 2007 年発行 *pp.*11-14

（福岡県 明治学園高等学校）