格子点を通過する整数係数の円の方程式 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ について

佐々木（ささき）　正敏（まさとし）

§1. 目的

通過する格子点を3点与えて整数係数の円の方程式を導く。2次の項の係数を1とするとき，1次の項の係数と定数項がすべて整数になるにはどのような格子点を与えればよいかを考える。

§2. 直径の両端点を利用する場合

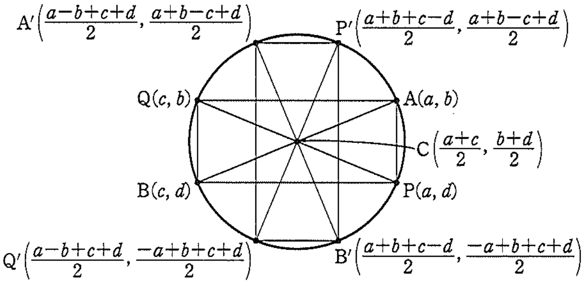
直径の両端を格子点とする円の方程式は必ず整数係数となる。a，b，c，d を整数とし，両端点を A$(a,\ b)$，B$(c,\ d)$ とすると，円の方程式は

$$(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)=0$$

で与えられるから，整理して整数係数の方程式

$$x^2+y^2-(a+c)x-(b+d)y+(ac+bd)=0$$

が得られる。2点を直径の両端点と明記しない場合は，もうひとつの格子点を用意する必要がある。下図でも分かるように $a \neq c$ かつ $b \neq d$ のときは，線分 AB を直径とする円周上に少なくとも A，B の他に P$(a,\ d)$ と Q$(c,\ b)$ の2個の格子点がある。A，B，P，Q をこの円の中心 C を中心として左回りに 90° 回転した点を，A′，B′，P′，Q′ とするとその座標は下図に示した通り。



したがって，a，b，c，d のうち奇数と偶数が偶数個ずつあれば A′，B′，P′，Q′ は格子点になる。

教科書や問題集の例題では，円周上の点の座標をピタゴラス数に取ることが多い。円の中心を原点 O としたとき第1象限に現れる円周上の点 R の x 座標，y 座標および OR の長さ（半径）の3数を，{3, 4, 5} や {5, 12, 13} などのピタゴラス数にとる。この場合は円と両軸の交点も格子点になるから，円周上に都合12個の格子点が得られる。このうちの任意の3点を与えればよい。例えば，数研出版「数学II改訂版」の例題（p.77）では，3点を $(-1,\ 7)$，$(2,\ -2)$，$(6,\ 0)$ で与えている。この3点は中心を原点とした場合，$(-3,\ 4)$，$(0,\ -5)$，$(4,\ -3)$ になるから {3, 4, 5} を利用している。

なお，$5^2+37^2=13^2+35^2$ などのように，異なる2組の数の平方の和が等しくなる場合もあるから，象限内の円周上に8個以上の格子点が存在する場合がある。

§3. 直径の両端点を利用しない場合

次に直径の両端点を用いない場合を考える。

通過する3点の1つを原点にとっても一般性を失わないから，通過する原点以外の2点を $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ で与え，求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my=0$（原点を通過するから定数項は0）とすると，係数 l，m は

$$l=-\frac{(x_1{}^2+y_1{}^2)y_2-(x_2{}^2+y_2{}^2)y_1}{x_1y_2-x_2y_1}$$

$$m=\frac{(x_1{}^2+y_1{}^2)x_2-(x_2{}^2+y_2{}^2)x_1}{x_1y_2-x_2y_1}$$

で与えられる。3点 $O(0,\ 0)$，$P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ を頂点とする三角形の面積は

$\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$ で与えられるから，三角形 OP_1P_2 の面積を $\frac{1}{2}$ にすれば，l，m の分母が $x_1y_2-x_2y_1=\pm1$ となって，係数 l，m が必ず整数になる。これを利用して3点を与えれば，容易に整数係数の円

の方程式を作ることができる。

例えば点 P_1 として $P_1(2,\ 5)$ をとると，方程式 $5x-2y=1$ を満たす整数 x，y は，例えば $x=1$，$y=2$ がある。したがって，3点として，$O(0,\ 0)$，$P_1(2,\ 5)$，$P_2(1,\ 2)$ を与えればよい。

このように a，b を互いに素である2整数として，格子点 $P_1(b,\ a)$ をとると，ディオファントスの方程式 $ax-by=\pm1$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ は必ず存在するから，これを P_2 の座標とすればよい。これより整数係数になる格子点3点を与えることが可能である。

数研出版「スタンダード数学II＋B」の182番(2)では，3点を $(1,\ 0)$，$(2,\ -1)$，$(3,\ -3)$ で与えているが，これは3点のつくる三角形の面積が $\frac{1}{2}$ になる例である。（了）

（東京都立三田高等学校）