線形計画法および不等式の一指導例

山田（やまだ） 一男（かずお）

§1. はじめに

図の中で直線を動かし，「領域と共有点をもつうちで最も上(下)」を確認して，１次式の最大値・最小値を求める方法があります。形式的には解くことができても，本当に理解しているのかどうか，何か釈然としないものを感じながらこれを指導してきました。それを整理すると，以下の２点です。

問題点(1)　最大値・最小値を求めたい式を $=k$ とおき，k は変化する値であるにもかかわらず，「k を定数と考え」，直線を上下させる点。この論理展開を本当の意味で，生徒は理解できているのだろうか。

問題点(2)　図を見て，直線が一番上(下)にくるのは，ある点を通るときだから，そのときが最大・最小をとると判断する点。「図を見て」という方法は，図が複雑だったり，定数を含んでいると図からの判断がしにくくなったり，論理を重視する数学の指導になじまないと思う。

もう一つ，ある意味私には深刻な問題ですが，目を悪くし，直線が「真っ直ぐ」に見えないことがあり，傾きが０でない斜めの直線を上下に動かして「図より」とすることに不安を感じるようになった。

以上を踏まえ本稿は，答を得るのに「斜めの直線を上下させ，図より」という議論はせず，なるべく論理を重視し，抽象的な議論の体験をさせる一実践例です。

教科書には，x，y についての不等式の表す領域が図示できるようになった後に，次のような例題があります。

例題　x，y が４つの不等式

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2x+y \leqq 8,\ 2x+3y \leqq 12$$

を同時に満たすとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ。

私はこの例題を解説する前に，x，y の不等式の表す領域の図示の練習問題の一つとして，宿題の中にこれを入れることにしています。ある意味，まじめな生徒は予習をし，後の例題の解法を真似て解答してきてあまり面白みがないですが，そうでない生徒の中に，私の意図する解法で解いてくる者が現れると，これまでの不等式指導に自己満足します。

§2. 指導例

発想は単純で，$x+y=k$ とおき，y を消去し，xk 平面に図示するだけです。生徒への解説は次です。

(1)　例題の解法①

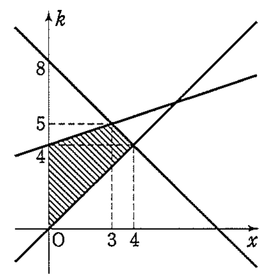
$x+y=k$ とおき，

$x+y=k$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+y \leqq 8$，$2x+3y \leqq 12$

から，y を消去し，xk 平面に図示する。(x を消去してもよい) すなわち，$y=k-x$ より，

$$x \geqq 0,\ k-x \geqq 0,\ x+k \leqq 8,\ -x+3k \leqq 12$$

これを xk 平面に図示すると，



よって，$x=3$ のとき，k は最大値５，$x=0$ のとき，k は最小値０をとる。

この方法は，$x+y$ を塊と捉え，どの文字に着目するかを気にすることの大切さ常々説いていると，できない発想ではないと思います。線形計画法は実生活の中で，数学的な見方・考え方の良さが実感できる数少ない教材ですが，複雑な操作をしないこの方法は興味・関心を引いたようで，生徒には好評で定着もよいようです。ただ，教科書，および問題集の問題は $\cdots=k$ とおき，直線を上下に移動させる方

法を意識しているので，この方法では，範囲が原点から離れたところにできてしまったり，歪な形の四角形になったりで，図示し辛いものが多いので，この点は工夫せねばと思います。また，扱う式の次数が高くなれば，計算がたいへんになり実用的ではないですが，2次までなら数学Ⅲまで履修すれば最大値・最小値を求めることができる場合が多いと思います。

さらに，この方法をもう少し発展させ，問題の文章を次のように表現を書き換えて，問題を捉え直す。

> 「連立不等式
> $x \geqq 0$，$k-x \geqq 0$，$x+k \leqq 8$，$-x+3k \leqq 12$
> を満たす x が存在する k の条件を求めよ。」

このように表現を変えると数学Ⅰの問題となります。解答は，この連立不等式を x についての不等式と捉えて解くことになります。

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq k \\ 3k-12 \leqq x \leqq 8-x \end{cases}$$

だから，この連立不等式を満たす x が存在する条件は $0 \leqq k$，$0 \leqq 8-k$，$3k-12 \leqq k$，$3k-12 \leqq 8-k$
すなわち，$0 \leqq k \leqq 5$
最大値・最小値が得られます。このような図によらない方法も話すことがあります。この図によらない方法は，解説し始めるとクラス全体が「解らない」というしらけたムードになるのが常ですが，「図に頼らず論理だけで解く」(と言っても所詮はどれかの文字に着目して不等式を解いているだけ) ことを体験してもらいたく紹介しています。

図を頼りにして解きにくい例としてよく出される次があります。

> **例題1**　a，b を実数とする。次の4つの不等式を同時に満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる領域を D とする。
> $$x+3y \geqq a,\ 3x+y \geqq b,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$$
> 領域 D における $x+y$ の最小値を求めよ。
> 〔2003 東京大〕

まず，$x+y=k$ とおくと，和が k となることは $x+y=k$，$x+3y \geqq a$，$3x+y \geqq b$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ を満たす x，y が存在することである。y を消去して，$y=k-x$ より，

$$3k-2x \geqq a,\ k+2x \geqq b,\ x \geqq 0,\ k-x \geqq 0$$

を満たす x が存在することである。不等式を x に着目して整理すると，

$$\frac{b-k}{2} \leqq x \leqq \frac{3k-a}{2},\ 0 \leqq x \leqq k$$

を満たす x が存在する。したがって，その条件は

$$\frac{b-k}{2} \leqq \frac{3k-a}{2},\ \frac{b-k}{2} \leqq k,\ 0 \leqq \frac{3k-a}{2},\ 0 \leqq k$$

k について整理すると，

$$\frac{a+b}{4} \leqq k,\ \frac{b}{3} \leqq k,\ \frac{a}{3} \leqq k,\ 0 \leqq k$$

したがって，4つの数 $\frac{a+b}{4}$，$\frac{b}{3}$，$\frac{a}{3}$，0 の最大値が k の最小値である。すなわち，求める最小値は

$$\max\left\{\frac{a+b}{4},\ \frac{b}{3},\ \frac{a}{3},\ 0\right\}$$

である。

1次式だけなら文字数が増えても，今と同じように文字を1個ずつ消去することで，場合分けは煩雑になりますが，解は得られます。

(2)　例題の解法②

もうひとつは，純粋に2変数 x，y の関数と捉えて解答する方法です。

2変数の関数 $f(x,\ y)=x+y$ の定義域を D と考えたとき値域を求めることになるが，まず x を固定して y だけを変化させると，定義域 D は

$0 \leqq x \leqq 4$ のとき，$0 \leqq y \leqq x$
$4 \leqq x \leqq 6$ のとき，$0 \leqq y \leqq 12-2x$

と表すことができるから，

$0 \leqq x \leqq 4$ のとき，$x \leqq f(x,\ y) \leqq 2x$
よって，$0 \leqq x \leqq f(x,\ y) \leqq 2x \leqq 8$
$4 \leqq x \leqq 6$ のとき，$x \leqq f(x,\ y) \leqq 12-x$
よって，$4 \leqq x \leqq f(x,\ y) \leqq 12-x \leqq 8$
したがって，等号成立を確認すれば，値域は
$0 \leqq f(x,\ y) \leqq 8$ の解を得る。

等号が成り立つときの x，y の値は逆をたどればすぐ得られる。

この考え方より，連立1次不等式で表される有界閉集合の多角形を定義域とする1次式の最大・最小はその頂点でとることが分かる。(直線を上下させる方法では，もっと分かりやすいが……) したがって，1次不等式で表された多角形の頂点での値だけを求めて，その中の最大のものが最大値，最小のものが最小値である。この事実はマーク方式のテスト対策として受験生には是非紹介しておきたいと考え

ています。

定義域を表す不等式に定数が含まれない場合はこの解法②が解きやすいと思います。例えばこんな例がありました。

> **例題 2**　xy 平面上で，連立不等式
>
> $y \leqq -2x+8$，$y \leqq -\dfrac{2}{3}x+4$，$y \geqq -\dfrac{1}{2}x+1$
>
> $x \geqq 0$，$y \geqq 0$
>
> の表す領域を D とする。
>
> (1)　略
>
> (2)　領域 D 上の点 $(x,\ y)$ に対して $x+y$ の値を考える。$x+y$ の値が最大となる点の座標は $\boxed{\text{ウ}}$であり，$x+y$ の値が最小となる点の座標は $\boxed{\text{エ}}$である。
>
> (3)　m を正の数とする。領域 D 上の点 $(x,\ y)$ に対して $mx+y$ の値を考える。$mx+y$ の値が $(3,\ 2)$ で最大になるのは，m の値が$\boxed{\text{オ}}$の範囲にあるときである。また，$mx+y$ の値の最小値が 1 であり，かつ，最大値が 4 であるのは，m の値が$\boxed{\text{カ}}$の範囲にあるときである。
>
> 〔2010 京都産業大〕

(3)は直線の傾きに定数 m が入るため，直線を上下させる考え方では，傾きに注意しながら図を丁寧に描かなければなりません。解法②において，1 次式の最大・最小は多角形の頂点でとることを認めれば，5 角形の頂点での値だけ調べればよいことになります。

実際，領域 D は五角形の周および内部だから，x，y の 1 次式はその頂点で最大・最小をとるから，頂点の座標は $(2,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(3,\ 2)$，$(0,\ 4)$，$(0,\ 1)$ で，それぞれでの $x+y$ の値は 2，4，5，4，1 だから，ウには $(3,\ 2)$，エには $(0,\ 1)$ が入る。

また，$mx+y$ についても同様で，$mx+y$ の値の最大・最小は頂点でとるから，頂点 $(2,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(3,\ 2)$，$(0,\ 4)$，$(0,\ 1)$ での，$mx+y$ の値はそれぞれ $2m$，$4m$，$3m+2$，4，1 である。よって，オの解は，$3m+2$ が最大になるときの m の範囲だから，次の 4 つの不等式を満たす m の範囲である。

$2m \leqq 3m+2$，$4m \leqq 3m+2$，$4 \leqq 3m+2$，$1 \leqq 3m+2$

よって，オには，$\dfrac{2}{3} \leqq m \leqq 2$

最後に，カは，$2m$，$4m$，$3m+2$，4，1 の 5 個の数の最大値が 4 で，最小値が 1 であることだから，解は次の 3 個の不等式を満たす m の範囲である。

$1 \leqq 2m \leqq 4$，$1 \leqq 4m \leqq 4$，$1 \leqq 3m+2 \leqq 4$

よって，カには，$\dfrac{1}{2} \leqq m \leqq \dfrac{2}{3}$

このように頂点での値だけに着目すれば，過度に図に頼らないのでグラフも描きやすい。

解法①をさらに掘り下げると，このアイデアは重積分の変数変換にも通ずるところがある。その例を二三挙げる。

> **例題 3**　$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6} \leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ。
>
> 〔2008 名古屋大・理系〕

$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6} \leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ が 1 組ある毎に 1 加えるという意味で，求める値を $\sum$ で表すと，$\displaystyle\sum_{\substack{\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6} \leqq 10 \\ 0 \leqq x,\, 0 \leqq y,\, 0 \leqq z}} 1$ である。

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6} \leqq 10 \\ 0 \leqq x,\, 0 \leqq y,\, 0 \leqq z}} 1 &= \sum_{\substack{0 \leqq z \leqq 60-3x-2y \\ 0 \leqq x,\, 0 \leqq y}} 1 = \sum_{\substack{0 \leqq 60-3x-2y \\ 0 \leqq x,\, 0 \leqq y}} (61-3x-2y) \\
&= \sum_{\substack{0 \leqq y \leqq 30-\frac{3x}{2} \\ 0 \leqq x}} (61-3x-2y) \\
&= \sum_{0 \leqq x \leqq 20} \sum_{0 \leqq y \leqq 30-\frac{3x}{2}} (61-3x-2y) \\
&= \sum_{\substack{0 \leqq x \leqq 20 \\ x\text{ は偶数}}} \sum_{0 \leqq y \leqq 30-\frac{3x}{2}} (61-3x-2y) \\
&\quad + \sum_{\substack{0 \leqq x \leqq 20 \\ x\text{ は奇数}}} \sum_{0 \leqq y \leqq 30-\frac{3x}{2}} (61-3x-2y) \\
&= \sum_{0 \leqq 2k \leqq 20} \sum_{0 \leqq y \leqq 30-3k} (61-3\cdot 2k-2y) \\
&\quad + \sum_{0 \leqq 2k-1 \leqq 20} \sum_{0 \leqq y \leqq 30-\frac{3(2k-1)}{2}} \{61-3(2k-1)-2y\} \\
&= \sum_{0 \leqq k \leqq 10} \sum_{0 \leqq y \leqq 30-3k} (61-3\cdot 2k-2y) \\
&\quad + \sum_{1 \leqq k \leqq 10} \sum_{0 \leqq y \leqq 31-3k} \{61-3(2k-1)-2y\} \\
&= 7106
\end{aligned}
$$

> **例題 4**　p，q を正の整数とする。整数 a，b，c で条件 $-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$，$b \leqq c \leqq a$
>
> を満たすものを考え，このような a，b，c を $[a,\ b : c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b : c]$ に対して，$\omega([a,\ b : c])=p-q-(a+b)$
>
> とおく。
>
> (1)　略

(2) s を整数とする。$(p,\ p)$ パターンで

$$\omega([a,\ b : c])=-p+s$$

をとなるものの個数を求めよ。

(3) $(p,\ p)$ パターンの総数を求めよ。

〔2011 東京大・理系〕

今の考え方によれば，(3)は単純な問題になります。

実際，$-q\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p$，$b\leqq c\leqq a$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ が1組ある毎に1加えるという意味で，求める値は $\displaystyle\sum_{\substack{-p\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p\\ b\leqq c\leqq a}}1$ だから，等差数列の和になっていることに注意して，

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{-p\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p\\ b\leqq c\leqq a}}1&=\sum_{-p\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p}\ \sum_{b\leqq c\leqq a}1=\sum_{-p\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p}(a-b+1)\\&=\sum_{-p\leqq b\leqq 0}\ \sum_{0\leqq a\leqq p}(a-b+1)\\&=\sum_{-p\leqq b\leqq 0}\frac{p+1}{2}\{(-b+1)+(p-b+1)\}\\&=\frac{p+1}{2}\sum_{-p\leqq b\leqq 0}(-2b+p+2)\\&=\frac{p+1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}\{(-p+2)+(p+2)\}\\&=(p+1)^2\end{aligned}$$

このような計算をすることになります。(2)を利用する必要がなく，自然な解法だと思います。(2)については，(3)にさらに条件：$a+b=p-s$ が追加されますので，計算が複雑になります。求める値は

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{-p\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p\\ b\leqq c\leqq a,\ a+b=p-s}}1&=\sum_{\substack{-p\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p\\ a+b=p-s}}\ \sum_{b\leqq c\leqq a}1\\&=\sum_{\substack{-p\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p\\ a+b=p-s}}(a-b+1)\\&=\sum_{\substack{-p\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p\\ b=p-s-a}}(a-b+1)\\&=\sum_{-p\leqq p-s-a\leqq 0\leqq a\leqq p}\{a-(p-s-a)+1\}\\&=\sum_{\substack{0\leqq a\leqq p\\ p-s\leqq a\leqq 2p-s}}(2a-p+s+1)\end{aligned}$$

ここで，a が存在する p，s の条件は

$$0\leqq p,\ p-s\leqq p,\ 0\leqq 2p-s,\ p-s\leqq 2p-s$$

である。すなわち，連立不等式

$$0\leqq a\leqq p,\ p-s\leqq a\leqq 2p-s$$

これを a について解くと，

$0\leqq s\leqq p$ のとき，$p-s\leqq a\leqq p$

$p<s\leqq 2p$ のとき，$0\leqq a\leqq 2p-s$

$s<0$ または $2p<s$ のとき，a は存在しない。

よって，求める値は $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqq a\leqq p\\ p-s\leqq a\leqq 2p-s}}(2a-p+s+1)$

$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{p-s\leqq a\leqq p}(2a-p+s+1) & (0\leqq s\leqq p)\\ \displaystyle\sum_{0\leqq a\leqq 2p-s}(2a-p+s+1) & (p\leqq s\leqq 2p)\\ 0 & (s<0,\ 2p<s)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(s+1)(p+1) & (0\leqq s\leqq p)\\ (2p-s+1)(p+1) & (p<s\leqq 2p)\\ 0 & (s<0,\ 2p<s)\end{cases}$$

教科書での $\sum$ の表示法とはかなり異なり，指導要領から逸脱するだろうが，重積分の変数変換の要領だから，理系では何れは会得せねばならない変形と思い紹介することがあります。

§3. おわりに

今述べた積分の変数変換の要領とは，例題3の不等式の表す図形（三角錐）の体積を求めるときの場合で言えば，次のことです。

$$\begin{aligned}\int_{\substack{\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}\leqq 10\\ 0\leqq x,\ 0\leqq y,\ 0\leqq z}}1\,dxdydz&=\int_{\substack{0\leqq z\leqq 60-3x-2y\\ 0\leqq x,\ 0\leqq y}}1\ dzdxdy\\&=\int_{\substack{0\leqq 60-3x-2y\\ 0\leqq x,\ 0\leqq y}}(60-3x-2y)dxdy\\&=\int_{\substack{0\leqq y\leqq 30-\frac{3x}{2}\\ 0\leqq x}}(60-3x-2y)dydx\\&=\int_{0\leqq x\leqq 20}\int_{0\leqq y\leqq 30-\frac{3x}{2}}(60-3x-2y)dydx\\&=\int_{0\leqq x\leqq 20}\left(30-\frac{3x}{2}\right)^2dx=6000\end{aligned}$$

最初に x，y を固定することで，教科書とは順序が逆ですが，線分の長さを重積分して体積を計算しています。もちろん，こんな話は雑談の中でしかできませんが，高校生に「級数と積分の共通性」を感じさせることができると思います。同じような不等式処理をしているなあと感じてくれればそれでよいわけです。

一般的に，文字数が増すにつれて生徒の拒否反応が大きくなります。それを配慮し，なるべく文字を新たに追加せず，追加しなければならないときは，追加後すぐ，前からある文字を消去することを心がけてきました。その一例でした。

（愛知県立五条高等学校）