正多角形から生まれる三角関数に関する等式について
—ベクトルや複素数とも関連して—

仁平（にへい）　政一（まさかず）

§1．三角関数の和

最初に「$P=\sin 10°+\sin 130°+\sin 250°$ の値を求めよ」という問題を考えてみましょう。

この問題を見たとき，「和積公式」と思うのはごく自然なことでしょう。

実際，それを用いて解くと次のようになります。

$$\begin{aligned}P&=(\sin 10°+\sin 250°)+\sin 130°\\&=2\sin 130°\cos 120°+\sin 130°\\&=\sin 130°(2\cos 120°+1)=0\end{aligned}$$

すなわち，求める値は 0 となります。

§2．図形を利用した解釈

実は，この問題の角 10°，130°，250° は，図 1 に示してあるような，一辺の長さが 1 の正三角形を x 軸に対して 10° 傾けたときの外角です。

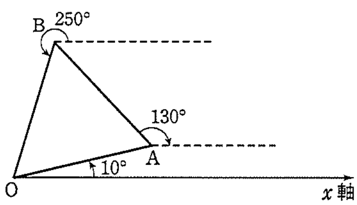

図 1

図 1 を，図 2 のようにベクトルとして捉えると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}}=\vec{0}$$

となります。

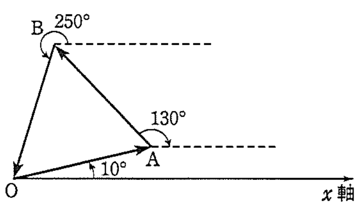

図 2

ところで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(\cos 10°,\ \sin 10°)$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\cos 130°,\ \sin 130°)$，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}=(\cos 250°,\ \sin 250°)$ となりますから，ただちに，

$$P=\sin 10°+\sin 130°+\sin 250°=0$$

となることがわかります。また，同時に

$$Q=\cos 10°+\cos 130°+\cos 250°=0$$

も得られます。

傾け方は，特に 10° である必要はありませんから，例えば，5° 傾けたときは，

$$\sin 5°+\sin 125°+\sin 245°=0$$

等が得られます。なお，このベクトルを使うアイデアは文献〔1〕によります。

同様にして，一辺の長さが 1 の正五角形を，x 軸に対して 10° 傾けると，図 3 より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DO}}=\vec{0}$$

ですから，

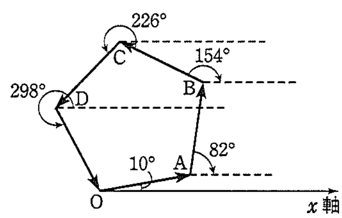

図 3

$$\sin 10°+\sin 82°+\sin 154°+\sin 226°+\sin 298°=0$$

や

$$\cos 10°+\cos 82°+\cos 154°+\cos 226°+\cos 298°=0$$

がただちに得られます。

§3．複素数を利用した解釈

ところで，$\sin 10°$，$\cos 10°$ 等がペアで現れるので，複素数（ド・モアブルの定理）を利用して扱えるのではないかと思うのは，ごく自然なことでしょう。

新学習指導要領のもとでは，数学Ⅲに複素平面が

復活しますので，上記の２つの等式の複素数を用いた証明を与えておきましょう。

複素数の場合は，弧度法で扱った方が便利なので，複素数が関係する場合は弧度法で話を進めることにします。

上記の正弦に関する等式の左辺を弧度法で表すと

$$\sin\frac{\pi}{18}+\sin\left(\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{18}+\frac{4\pi}{5}\right)+$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{18}+\frac{6\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{18}+\frac{8\pi}{5}\right)$$

となります。よって，

$$T=e^{\frac{\pi}{18}i}+e^{\left(\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{5}\right)i}+e^{\left(\frac{\pi}{18}+\frac{4\pi}{5}\right)i}+e^{\left(\frac{\pi}{18}+\frac{6\pi}{5}\right)i}+e^{\left(\frac{\pi}{18}+\frac{8\pi}{5}\right)i}$$

を計算すればよいことになります。

$$T=e^{\frac{\pi}{18}i}\{1+e^{\frac{2\pi}{5}i}+(e^{\frac{2\pi}{5}i})^2+(e^{\frac{2\pi}{5}i})^3+(e^{\frac{2\pi}{5}i})^4\}$$
$$=e^{\frac{\pi}{18}i}\left\{\frac{1-(e^{\frac{2\pi}{5}i})^5}{1-e^{\frac{2\pi}{5}i}}\right\}=e^{\frac{\pi}{18}i}\left(\frac{1-e^{2\pi i}}{1-e^{\frac{2\pi}{5}i}}\right)$$

ですから，$e^{2\pi i}=1$ より，$T=0$ となり，上記の２つの等式を得ることができます。

一般に，一辺の長さが１の正 n 角形を x 軸に対して A $(0°\leqq A\leqq 90°)$ 傾けたとすれば，ただちに，$n\geqq 3$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(A+\frac{k\times 360°}{n}\right)=0$$

や

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(A+\frac{k\times 360°}{n}\right)=0$$

が得られます。

ところで，数学的には，次に示すよく知られている公式の特別な場合になっていますので，当たり前と言われればそれまでなのですが……。

でも，公式そのままだと，高校の教材としては二の足を踏みそうですが，上記のように正多角形とからませると，教材としての魅力を持つのではないでしょうか。

公式 (1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin(\alpha+kh)=$

$$\begin{cases}\dfrac{\sin(\alpha+(n-1)h/2)\sin(nh/2)}{\sin(h/2)} & (h\neq 2m\pi) \\ n\sin\alpha & (h=2m\pi)\end{cases}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\alpha+kh)=$

$$\begin{cases}\dfrac{\cos(\alpha+(n-1)h/2)\sin(nh/2)}{\sin(h/2)} & (h\neq 2m\pi) \\ n\cos\alpha & (h=2m\pi)\end{cases}$$

ただし，m，n は自然数とする。

§4. 三角関数の積

次に，「$\cos 36°\cos 72°$ の値を求めよ」という問題を考えてみましょう。

この問題は「和積公式」でただちにとはいきません。けっこう難問です（？）。

§5. 図形を利用した解釈

ここで，また１辺の長さが１の正五角形を登場させます。

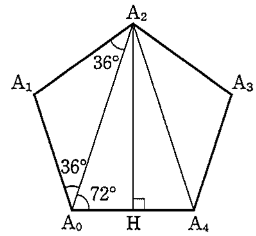

図４

図４から，ただちに

$A_0A_2=2\cos 36°$

$A_0H=A_0A_2\cos 72°=(2\cos 36°)\cos 72°$ ①

$A_0A_4=2A_0H=1$ ②

が得られます。ゆえに，①と②より，

$$\cos 36°\cos 72°=\frac{1}{4}$$

となることがわかります。

次に１辺の長さが１の正九角形で同様なことを考えてみましょう。

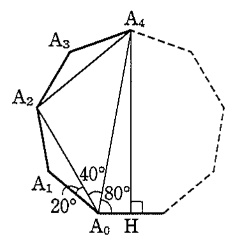

図５

図５から

$A_0A_2=2\cos 20°$

$A_0A_4=2A_0A_2\cos 40°=2^2\cos 20°\cos 40°$

$A_0H=A_0A_4\cos 80°=2^2\cos 20°\cos 40°\cos 80°$

よって，

$1=2A_0H=2^3\cos 20°\cos 40°\cos 80°$

したがって，

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{2^3}$$

一般に，全く同様にして，１辺の長さが１の正 (2^n+1) 角形を考えることにより，次の式が得られます（表現を簡潔にするために弧度法での表現になっています）。

公式 $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{2^{j-1}\pi}{2^n+1}\right) = \frac{1}{2^n}$

§6. 複素数を利用した解釈

この式も複素数を用いて証明できます。念のため，述べておきましょう。

一般に，

$$|1+e^{\beta i}|^2 = (1+e^{\beta i})\overline{(1+e^{\beta i})} = 2^2\cos^2\frac{\beta}{2}$$

が成り立ちますから，$\cos\frac{\beta}{2}>0$ ならば，

$$|1+e^{\beta i}| = 2\cos\frac{\beta}{2} \quad ③$$

が成り立ちます。

いま，$\alpha = e^{\frac{2\pi}{2^n+1}i}$ として，③を適用すれば

$$|1+(\alpha)^{2^{k-1}}| = |1+e^{\frac{2^k\pi}{2^n+1}i}| = 2\cos\frac{2^{k-1}\pi}{2^n+1}$$

となります。ゆえに，命題を証明するためには

$$|(1+\alpha)(1+\alpha^2)(1+\alpha^4)\cdots(1+e^{2^{n-1}})| = 1$$

を示せばよいことになります。ところで，

$$(1+\alpha)(1+\alpha^2)(1+\alpha^4)\cdots(1+e^{2^{n-1}})$$
$$=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^4+\cdots\cdots+e^{2^{n-1}} = \frac{1-\alpha^{2^n}}{1-\alpha}$$

ですから，

$$\left|\frac{1-\alpha^{2^n}}{1-\alpha}\right| = 1 \quad すなわち \quad |1-\alpha^{2^n}| = |1-\alpha|$$

を示せばよいことになります。ところで，

$$1-\alpha^{2^n} = 1-e^{\frac{2^{n+1}\pi}{2^n+1}i}$$
$$=1-\left(\cos\frac{2^{n+1}\pi}{2^n+1} + i\sin\frac{2^{n+1}\pi}{2^n+1}\right)$$
$$=1-\left\{\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{2^n+1}\right) + i\sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{2^n+1}\right)\right\}$$
$$=1-\left(\cos\frac{2\pi}{2^n+1} - i\sin\frac{2\pi}{2^n+1}\right)$$

ですから，$|1-\alpha^{2^n}| = |1-\alpha|$ であることがわかります。

《参考文献》

〔１〕 数学オリンピック特別講義（第３集） 李成章・黄玉民著 小室久仁雄訳 吉林教育出版社オリンピック双書（訳は未出版），訳原稿 *pp*.198-199
〔２〕 モノグラフ24公式集 4訂版 矢野健太郎監修 春日正文編 科学新興社 1988 *pp*.164-165

（茨城大学非常勤講師（元茨城県立藤代高等学校））