多面体の考察

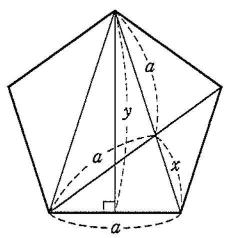
木村(きむら)　嘉宏(よしひろ)

§1. はじめに

正二十面体，正十二面体の外接球及び内接球の半径，また，切頂三十二面体の外接球の半径及び体積について，高校生にも理解できそうな範囲で考察してみたい。

まず準備として，一辺の長さが $a\,(a>0$ とする) の正五角形について調べておこう。

図のように対角線を引いて三角形の相似に着目すると



$$a:x=(a+x):a$$

$$x(a+x)=a^2$$

$$x^2+ax-a^2=0$$

$x>0$ であるから

$$x=\frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}$$

これより，対角線の長さは

$$\frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}+a=\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$$

また，頂点を通り，正五角形を二等分する線分の長さを y とすると，三平方の定理により

$$y=\sqrt{\left\{\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}\right\}^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2(5+2\sqrt{5})}{4}}=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}a$$

以上のことから

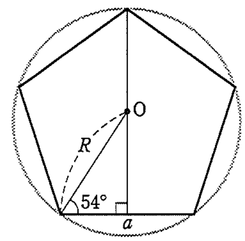
$$\cos 72^\circ=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}}=\frac{1}{1+\sqrt{5}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos 36^\circ=\sqrt{\frac{1+\cos 72^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$$

$$=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}}=\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{16}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

次に，外接円の半径を R とすると



$R\cos 54^\circ=\dfrac{a}{2}$ より

$$R=\frac{a}{2\cos 54^\circ}$$

ここで

$$\cos 54^\circ=\sin 36^\circ=\sqrt{1-\cos^2 36^\circ}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

であるから

$$R=\frac{2a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}=\frac{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}}a$$

$$=\frac{\sqrt{10}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{10}a$$

次に，面積は

$$2\times\frac{1}{2}\times a\times\left\{\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}\right\}\times\sin 36^\circ$$

$$+\frac{1}{2}\times\left\{\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}\right\}^2\times\sin 36^\circ$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)a^2\times\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$=\frac{5+3\sqrt{5}}{4}a^2\times\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{(5+3\sqrt{5})^2(10-2\sqrt{5})}}{16}a^2$$

$$=\frac{\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4}a^2$$

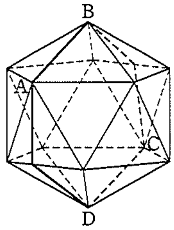
§2. 正二十面体の外接球及び内接球の半径

1辺の長さが2の正二十面体の外接球及び内接球の半径を求めてみよう。

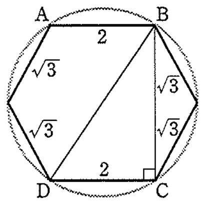
(1)　外接球の半径

正二十面体を次の図の実線のように2等分し，切り口の外接円の半径を調べることにより，外接

球の半径を求めてみよう。



切り口は下の図のような六角形であり，線分 BD が外接球の直径である。線分 BC は参考図に示したように，1 辺の長さが 2 の正五角形の対角線の長さに等しく，$1+\sqrt{5}$ である。



三平方の定理より

$$BD^2=2^2+(1+\sqrt{5})^2$$
$$=10+2\sqrt{5}$$

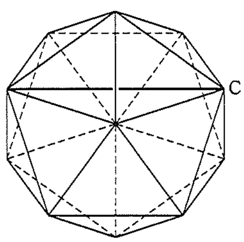
BD>0 より

$$BD=\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

したがって，外接球の半径は

$$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$$

（参考図）



(2) 内接球の半径

1 辺の長さが 2 の正三角形の外接円の半径は正弦定理より $\dfrac{2}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ であるから

内接球の半径を r とすると，三平方の定理より

$$r^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\right)^2$$

$$r^2=\sqrt{\frac{14+6\sqrt{5}}{12}}=\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})^2}{12}}$$

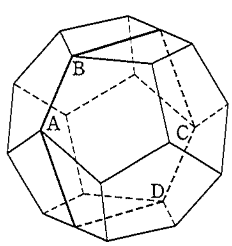
$r>0$ であるから

$$r=\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$$

§3. 正十二面体の外接球及び内接球の半径

1 辺の長さが 2 の正十二面体の外接球及び内接球の半径を求めてみよう。

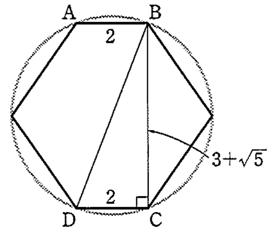
(1) 外接球の半径



正十二面体を右の図の実線のように 2 等分し，切り口の外接円の半径を調べることにより，外接球の半径を求めてみよう。

切り口は下の図のような六角形であり，線分 BD が外接球の直径である。線分 BC は参考図に示したように，一辺の長さが $\sqrt{5}+1$ の正五角形の対角線の長さに等しく，$3+\sqrt{5}$ である。

三平方の定理より



$$BD^2=2^2+(3+\sqrt{5})^2$$
$$=18+6\sqrt{5}$$

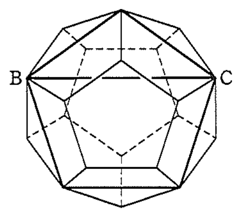
BD>0 より

$$BD=\sqrt{18+6\sqrt{5}}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{15}+\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{15}+\sqrt{3}$$

したがって，外接球の半径は

$$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}$$

（参考図）



(2) 内接球の半径

1 辺の長さが 2 の正五角形の外接円の半径は

$$\frac{\sqrt{10}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{5}$$

であるから内接球の半径を r とすると，三平方の定理より

$$r^2+\left(\frac{\sqrt{10}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{5}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$r^2=\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{10}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{5}\right)^2$$

$$=\frac{18+6\sqrt{5}}{4}-\frac{2(5+\sqrt{5})}{5}$$

$$=\frac{90+30\sqrt{5}-40-8\sqrt{5}}{20}=\frac{50+22\sqrt{5}}{20}$$

$r>0$ であるから

$$r=\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{20}}=\frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{10}$$

$$=\frac{\sqrt{(6+2\sqrt{5})(25+10\sqrt{5})}}{10}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}$$

§4. 切頂三十二面体の考察

切頂三十二面体(正五角形12枚と正六角形20枚を貼り合わせた一般的なサッカーボールの形)は，正二十面体の各頂点から正五角形を削り取って作ることができる。例えば，一辺の長さが6の正二十面体の各頂点から，一辺の長さが2の正五角形を削り取ると，一辺の長さが2の切頂三十二面体を作ることができる。

(1) 外接球の半径

1辺の長さが2の切頂三十二面体の中心から正六角形の各面までの距離は，一辺の長さが6の正二十面体の内接球の半径と等しく

$$\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$$

である。

1辺の長さが2の正六角形の外接円の半径は2であるから，外接球の半径を R とすると
三平方の定理より

$$R^2=2^2+\left(\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}\right)^2$$

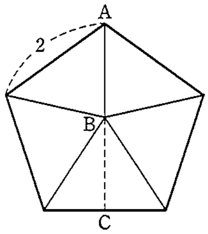
$$=\frac{58+18\sqrt{5}}{4}$$

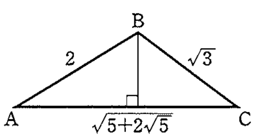
$R>0$ より

$$R=\frac{\sqrt{58+18\sqrt{5}}}{2}$$

(2) 体積

1辺の長さが2の切頂三十二面体は，1辺の長さが6の正二十面体の各頂点から，図のような正五角すいを削り取ればよい。





余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{2^2+(5+2\sqrt{5})-3}{2\times2\times\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{6+2\sqrt{5}}{4\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$

これより

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{\left(1-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\right)^2\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{4(5+2\sqrt{5})-(14+6\sqrt{5})}{4(5+2\sqrt{5})}}$$

$$=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4(5+2\sqrt{5})}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$

正五角すいの高さを h とすると

$$h=2\times\sin\angle\mathrm{BAC}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$

であるから正五角すいの体積は

$$\frac{1}{3}\times(\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}})\times\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+5}{3}$$

1辺の長さが6の正二十面体は，1つの面(1辺の長さ6の正三角形)の面積が

$$\frac{1}{2}\times6\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$$

内接球の半径が，$\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$ であるから，体積は

$$20\times\frac{1}{3}\times9\sqrt{3}\times\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$$

$$=270+90\sqrt{5}$$

以上のことから，一辺の長さが2の切頂三十二面体の体積は

$$270+90\sqrt{5}-12\times\frac{\sqrt{5}+5}{3}$$

$$=250+86\sqrt{5}$$

《参考文献》

〔1〕 数学教材の部屋
http://homepage 2. nifty. com/sintakenoko/

(京都府立網野高等学校間人分校)