「じゃんけん」の授業について

阿部(あべ) 徹(とおる)

§1. はじめに

確率の基本的な問題で２人や３人で「じゃんけん」をして「あいこ」になる確率を求めさせる問題がある。いずれも樹形図を用いたり場合わけを行って計算する解答や解説になっている。しかし場合わけでの解法だけでは，人数が増えればパターンが膨大になり処理できなくなるのが明白なので，別な解き方も説明するようにしているのでその方法を紹介したい。

§2. 具体例

グー，チョキ，パーのいずれかをそれぞれ不確定に○，□，△として考える。

〈問１〉 A，B，C，Dの４人で「じゃんけん」をしたとき「あいこ」になる確率を求めよ。

(i) ４人が同じものを出す場合（４人が○）

○がグー，チョキ，パーのいずれであるかの決め方が ${}_3C_1$

$${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{27} \quad \cdots\cdots①$$

またはAは何を出してもよくB，C，Dが同じものを出せばいいとも考えられるので

$$\frac{3}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27} \quad \cdots\cdots①$$

でも求められる。

(ii) ４人が３種類のものを出す場合

（２人が○，１人が□，１人が△）

○の決め方は３通り，○を出す２人の決め方は ${}_4C_2$，□を出す１人の決め方は２通りあるから

$$3\times{}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9} \quad \cdots\cdots②$$

求める解は①，②の和になるので

$$\frac{1}{27}+\frac{4}{9}=\frac{13}{27} \quad \cdots\cdots(答)$$

では５人の場合はどうか。

〈問２〉 A，B，C，D，Eの５人で「じゃんけん」をしたとき「あいこ」になる確率を求めよ。

〈問１〉と同様に考えて

(i) ５人が同じものを出す場合（５人が○）

$$\frac{3}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81} \quad \cdots\cdots③$$

(ii) ５人が３種類のものを出す場合は以下の２通りがある。

(1) ３人が○，１人が□，１人が△

○の決め方は３通り，○を出す３人の決め方は ${}_5C_3$ 通り，□を出す１人の決め方は２通りあるから

$$3\times{}_5C_3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{20}{81} \quad \cdots\cdots④$$

(2) ２人が○，２人が□，１人が△

△の決め方は３通り，△を出す１人の決め方は５通り，○を出す２人の決め方は ${}_4C_2$ 通りあるから

$$3\times5\times\frac{1}{3}\times{}_4C_2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{10}{27} \quad \cdots\cdots⑤$$

求める解は③，④，⑤の和になるので

$$\frac{1}{81}+\frac{20}{81}+\frac{10}{27}=\frac{17}{27} \quad \cdots\cdots(答)$$

という解答が一般的と思われる。しかし，実は何人かでじゃんけんをした結果が，「何人が勝った（負けた）」あるいは「ひきわけ」というとらえかたではなく，グー，チョキ，パーの３種類のうち何種類が出されたかというとらえ方をすると，人数に関係なく容易に処理することができる。すなわち，じゃんけんをすれば１種類か２種類か３種類のうちのいずれかの状態になり，あいこになるとは「１種類または３種類」の状態であり，「２種類」の余事象と考えることができる。

まず，４人の場合は２種類になるとは，４人が○と□だけ出す（△なしじゃんけん）場合を考えそのう

ち4人全員が○だけと□だけになる2通りを引けばよく，グー，チョキ，パーの3種類から2種類の選び方は${}_3C_2$，4人の手の出し方は3^4なので，2種類になる確率は$\dfrac{{}_3C_2(2^4-2)}{3^4}$となり，あいこになる確率はこれの余事象なので$1-\dfrac{{}_3C_2(2^4-2)}{3^4}=\dfrac{13}{27}$と求めることができる。

次に，5人の場合2種類になるとは，5人が○と□だけ出す場合を考えそのうち5人全員が○だけと□だけになる2通りを引いてやればいいので同様に考えて，あいこになる確率は

$$1-\frac{{}_3C_2(2^5-2)}{3^5}=\frac{17}{27}\ \cdots\cdots(答)$$

これはn人に拡張しても同様に処理できるのでn人でじゃんけんをしてあいこになる確率は

$$1-\frac{{}_3C_2(2^n-2)}{3^n}=\frac{3^{n-1}-2^n+2}{3^{n-1}}\ \cdots\cdots(答)$$

という結構エレガントな式が求められる。

しかも「1人でじゃんけんすればすべてあいこだ」と考えれば$n\geqq1$で成り立つ式といえる。

以上でじゃんけんの問題についての結論は出たのだが，他分野との関係で授業を発展的に展開することができる。

§3. 二項定理との関係について

2^n-2の値を，以下のように考えさせると二項定理について再確認させることができる。

2種類ということは何人かが勝ち何人かが負けるということなので，n人のうち1人が勝つ場合はその1人の決め方は${}_nC_1$，以下2人が勝つ場合は${}_nC_2$，3人が勝つ場合は${}_nC_3$ …… $n-1$人が勝つ場合は${}_nC_{n-1}$通りで，何で勝つかは3通りなので

$$3({}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1})$$

を計算すればよく二項定理の有名な式

$${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n=2^n$$

を利用すると${}_nC_0=1$，${}_nC_n=1$から

$$3({}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1})=3(2^n-2)$$

となり前述の式に帰結する。

§4. 漸化式への発展学習

じゃんけんは当然ほぼ同時に出すのだけれども，何を出したかを1人目2人目と順番に確認すると考えると「n人でじゃんけんをした後そのままの状態に$n+1$人目が意図すれば必ずあいこにすることが出来る。」という面白い性質がわかる。(蛇足？)

(i) 2人でじゃんけんした後で3人目が加わった状況を考える。すなわち3人目が加わったことにより1種類，2種類，3種類のそれぞれの状態が確率的にどう変化したのかを計算する。1種類の状態であるのは，

$\left(\dfrac{1}{3}\text{の確率で1種類だったものに}\dfrac{1}{3}\text{を掛けた値}\right)$

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

2種類の状態であるのは，

$\left(\dfrac{1}{3}\text{の確率で1種類だったものに別な2種類をだす確率}\dfrac{2}{3}\text{を掛けた値}\right)$

$+\left(\dfrac{2}{3}\text{の確率で2種類だったものにそのどちらかを選択する確率}\dfrac{2}{3}\text{を掛けた値}\right)$

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

3種類の状態であるのは，

$\left(\dfrac{2}{3}\text{の確率で2種類だったものにそれ以外のものを出す確率}\dfrac{1}{3}\text{を掛けた値}\right)$

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

(ii) 3人がじゃんけんした後で4人目が加わった状況を考える。(i)と同様に考えれば以下の式が成り立つ。

1種類の状態であるのは

$$\frac{1}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$$

2種類の状態であるのは

$$\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{14}{27}$$

3種類の状態であるのは

$\left(\dfrac{2}{3}\text{の確率で2種類だったものに別な1種類をだす確率}\dfrac{1}{3}\text{を掛けた値}\right)$

$+\left(\dfrac{2}{9}\text{の確率で3種類だったものには3種類出せるので}\dfrac{3}{3}\text{を掛けた値}\right)$

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\times\frac{3}{3}=\frac{12}{27}$$

(iii) 4人でじゃんけんした後で5人目が加わった状況を考える。

(省略)

これらをまとめると以下の表1になる。

(約分省略箇所あり)

(表1)

種別＼人数	2人	3人(計算)	確率	4人(計算)	確率	5人(計算)	確率
1種類	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}\times\frac{1}{3}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}\times\frac{1}{3}$	$\frac{1}{81}$
2種類	$\frac{2}{3}$	$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\end{array}\right\}$	$\frac{6}{9}$	$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}\\ \frac{6}{9}\times\frac{2}{3}\end{array}\right\}$	$\frac{14}{27}$	$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{27}\times\frac{2}{3}\\ \frac{14}{27}\times\frac{2}{3}\end{array}\right\}$	$\frac{30}{81}$
3種類	0	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\left.\begin{array}{l}\frac{6}{9}\times\frac{1}{3}\\ \frac{2}{9}\times\frac{3}{3}\end{array}\right\}$	$\frac{12}{27}$	$\left.\begin{array}{l}\frac{14}{27}\times\frac{1}{3}\\ \frac{12}{27}\times\frac{3}{3}\end{array}\right\}$	$\frac{50}{81}$
あいこになる確率 1+3種類	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{13}{27}$		$\frac{51}{81}=\frac{17}{27}$	

(iv) n人$(2\leqq n)$でじゃんけんした後で$n+1$人目が加わった状況を考える。(ここでn人でじゃんけんをしてあいこになる確率をp_nとする)

1種類の状態である確率は

$$\frac{1}{3^{n-1}}$$

1種類と3種類の確率を加えるとあいこの確率になるので3種類の状態である確率は

$$p_n-\frac{1}{3^{n-1}}$$

2種類の状態であるのは

$$1-p_n$$

この状態から$n+1$人目が加わると1種類の状態であるのは,

$$\frac{1}{3^{n-1}}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3^n}$$

2種類の状態であるのは

$$\frac{1}{3^{n-1}}\times\frac{2}{3}+(1-p_n)\times\frac{2}{3}$$

3種類の状態であるのは

$$(1-p_n)\times\frac{1}{3}+\left(p_n-\frac{1}{3^{n-1}}\right)\times\frac{3}{3}$$

以上まとめると以下の表2になる。

(表2)

種別＼人数			n人確率	$n+1$人(計算)
1種類			$\frac{1}{3^{n-1}}$	$\frac{1}{3^{n-1}}\times\frac{1}{3}$
2種類			$1-p_n$	$\frac{1}{3^{n-1}}\times\frac{2}{3}$ $(1-p_n)\times\frac{2}{3}$
3種類			$p_n-\frac{1}{3^{n-1}}$	$(1-p_n)\times\frac{1}{3}$ $\left(p_n-\frac{1}{3^{n-1}}\right)\times\frac{3}{3}$
あいこ… 1+3種類			p_n	p_{n+1}

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3}(1-p_n)+\left(p_n-\frac{1}{3^{n-1}}\right)\\ \quad=\frac{2}{3}p_n-\frac{2}{3^n}+\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

以上により $p_{n+1}=\frac{1}{3^n}+\left\{(1-p_n)\times\frac{1}{3}+\left(p_n-\frac{1}{3^{n-1}}\right)\right\}$

整理すると $p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n-\frac{2}{3^n}+\frac{1}{3}\ (2\leqq n)$, $p_2=\frac{1}{3}$

という漸化式が求められる。

これを変形して $p_{n+1}-\frac{2}{3^n}-1=\frac{2}{3}\left(p_n-\frac{2}{3^{n-1}}-1\right)$

とすると

初項 $p_2-\frac{2}{3}-1=-\frac{4}{3}$, 公比$\frac{2}{3}$の等比数列なので

$$p_n-\frac{2}{3^{n-1}}-1=-\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

$$p_n=-\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}+\frac{2}{3^{n-1}}+1$$

$$=1-\frac{2^n}{3^{n-1}}+\frac{2}{3^{n-1}}$$

$$=\frac{3^{n-1}-2^n+2}{3^{n-1}}$$

が求められる。

§5. おわりに

授業では2～3時間くらいの内容である。確率や漸化式は苦手にしている生徒が多い分野であるが,関連づけて話すと結構興味を持ち食いついてくる生徒もいるようである。いわゆる難関大の入試では,確率を漸化式で処理して求める問題がたまに見受けられるので,先生方の授業の参考にしていただけると幸大である。

(宮城県　石巻高等学校)