「エジプトひも」がつくる三角形

よこやま　としのり
横山　俊則

§1. はじめに

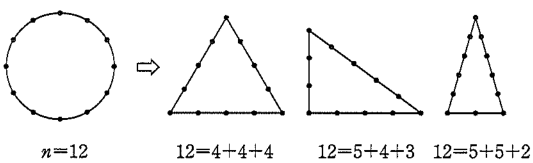
エジプトひもを使ってできる多角形はいろいろあって，実際やってみると生徒も参加できておもしろい。

ここでは，エジプトひもがつくる三角形の種類について考える。

H21年度　金光学園中学校入試問題より

> 長さ 12 m のロープが輪になっていて，1 m ごとに印がついている。印のついたところを 3 カ所もって引っ張り三角形をつくる。何種類の三角形ができるか。ただし，合同な三角形は 1 種類とする。

(解答)　　3 種類できる。



§2. 長さ n のエジプトひもの場合について

このとき，自然数 n を 3 つの自然数の和に分割するうち，どの 2 つの和も残りの 1 つより大きい分割の仕方の個数を求めればよい(三角不等式を満たす)。

自然数 n について，3 種類の分割を考える。

$P_n=\{(a,\ b,\ c)\,|\,a+b+c=n,\ a\geqq b\geqq c\geqq 1,\ a<b+c\}$

$Q_n=\{(a,\ b,\ c)\,|\,a+b+c=n,\ a\geqq b\geqq c\geqq 1\}$

$R_n=\{(a,\ b,\ c)\,|\,3a+2b+c=n,\ a\geqq 1,\ b\geqq 0,\ c\geqq 0\}$

ただし，n，a，b，c は，整数である。

P_n，Q_n，R_n の要素の個数を p_n，q_n，r_n とする。

m を 0 以上の整数とすると，次の等式が成立する。

① $p_{2m}=q_m$	② $p_{2m+4}=p_{2m+1}$	③ $q_m=r_m$

① $p_{2m}=q_m$ の証明

$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ が，Q_m から P_{2m} への全単射写像となる。

実際 $(a,\ b,\ c)\in Q_m$ とすると，

$a+b+c=m$，$a\geqq b\geqq c\geqq 1$，

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\c+a\\b+c\end{pmatrix}$$

・$x+y+z=(a+b)+(c+a)+(b+c)=2m$

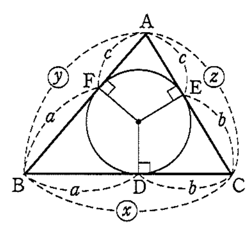
・$a+b\geqq a+c\geqq b+c\geqq 1$ より，$x\geqq y\geqq z\geqq 1$

・$(y+z)-x=2c>0$　　$\therefore$　$x<y+z$

よって，$(x,\ y,\ z)\in P_{2m}$

逆も成立する。 ∎

この P_{2m} と Q_m の関係は，周の長さが偶数である三角形の内接円を作図することにより，見ることができる。



$x+y+z=2m$

$s=\dfrac{x+y+z}{2}=m$

とする。

$a=s-z=\dfrac{x+y-z}{2}$，$b=s-y=\dfrac{x-y+z}{2}$，

$c=s-x=\dfrac{-x+y+z}{2}$

$x+y-z$，$x-y+z$，$-x+y+z$ は偶数より，a，b，c は自然数となる。

② $p_{2m+4}=p_{2m+1}$ の証明

$(a,\ b,\ c)\in P_{2m+4}$ とすると

・$a+b+c=2m+4$，・$a<b+c$，・$a\geqq b\geqq c\geqq 1$

このとき，$(a-1,\ b-1,\ c-1)\in P_{2m+1}$ を示す。

・$(a-1)+(b-1)+(c-1)=(a+b+c)-3=2m+1$

・$(b-1)+(c-1)-(a-1)=(b+c-a)-1>0$

なぜならば，$a+b+c$ が偶数より $b+c-a$ も偶数であり $b+c>a$ より $b+c-a\geqq 2$ であるから。

・$a-1\geqq b-1\geqq c-1\geqq 1$

なぜならば，$c-1=0$ のとき，$c=1$

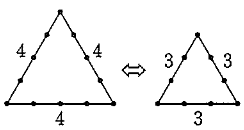
このとき，$a+b$ は奇数となり，a と b の偶奇が一致しない。$a-b\geqq 0$ より $a-b\geqq 1$

よって，$a\geqq b+1$，$a\geqq b+c$，これは $a<b+c$ に反するので。

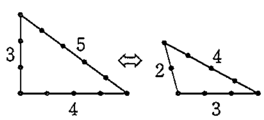
逆は明らかである。 ■

（例） $m=4$ のとき，$p_{12}=p_9$

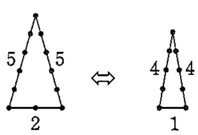
$n=12$ $n=9$



$4+4+4 \longleftrightarrow 3+3+3$



$5+4+3 \longleftrightarrow 4+3+2$



$5+5+2 \longleftrightarrow 4+4+1$

③ $q_m=r_m$ の証明

$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ が，R_m から Q_m への全単射写像である。

実際 $(a,\ b,\ c)\in R_m$ とすると

$3a+2b+c=m$，$a\geqq 1$，$b\geqq 0$，$c\geqq 0$，

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b+c\\a+b\\a\end{pmatrix}$$

・$x+y+z=(a+b+c)+(a+b)+a=3a+2b+c$
$\qquad =m$

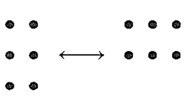
・$a+b+c\geqq a+b\geqq a\geqq 1$ より $x\geqq y\geqq z\geqq 1$

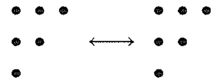
逆も明らかに成立する。 ■

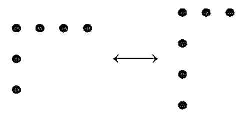
（例） $m=6$ のとき $q_6=r_6$

フェラーズの図形においては，反転になっている。

Q_6 R_6

(ア)  $2+2+2 \longleftrightarrow 3+3$

(イ)  $3+2+1 \longleftrightarrow 3+2+1$

(ウ)  $4+1+1 \longleftrightarrow 3+1+1+1$

①，③より，R_m から P_{2m} への全単射写像が求まる。

$$AB=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&1&1\\2&1&0\end{pmatrix}$$

実際 $(a,\ b,\ c)\in R_m$ とすると

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&1&1\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+2b+c\\2a+b+c\\2a+b\end{pmatrix}$$

・$x+y+z=2(3a+2b+c)=2m$

・$y+z-x=2a\geqq 2$

・$a\geqq 1$，$b\geqq 0$，$c\geqq 0$ より

$2a+2b+c\geqq 2a+b+c\geqq 2a+b\geqq 2$

よって，$x\geqq y\geqq z\geqq 2$

逆も明らかに成立する。

§3. r_m を求める

> k を 0 以上の整数とするとき，次の漸化式が成立する。
>
> $$r_{k+6}=r_k+k+3$$

（証明） $(a,\ b,\ c)\in R_{k+6}$ のとき，

$3a+2b+c=k+6$，$a\geqq 1$，$b\geqq 0$，$c\geqq 0$

となる。

○ $a\geqq 3$ のとき，$3(a-2)+2b+c=k$，$a-2\geqq 1$ より $(a-2,\ b,\ c)\in R_k$

○ $a=2$ のとき，$2b+c=k$，これを満たす $(b,\ c)$ の個数は $\left[\dfrac{k}{2}\right]+1$ 個

○ $a=1$ のとき，$2b+c=k+3$，これを満たす $(b,\ c)$ の個数は $\left[\dfrac{k+3}{2}\right]+1$ 個

よって，$r_{k+6}=r_k+\left[\dfrac{k}{2}\right]+1+\left[\dfrac{k+3}{2}\right]+1$
$\qquad =r_k+k+3$ ■

また，$r_0=0$，$r_1=0$，$r_2=0$，$r_3=1$，$r_4=1$，$r_5=2$ である。

以上のことから r_m を求めることができる。

> m を0以上の整数とするとき
> $r_{6m}=3m^2$, $r_{6m+1}=3m^2+m$, $r_{6m+2}=3m^2+2m$,
> $r_{6m+3}=3m^2+3m+1$, $r_{6m+4}=3m^2+4m+1$,
> $r_{6m+5}=3m^2+5m+2$

(証明)

$$
\begin{aligned}
r_{6m}&=r_0+(r_6-r_0)+(r_{12}-r_6)+\\
&\qquad\cdots\cdots+(r_{6m}-r_{6(m-1)})\\
&=0+(0+3)+(6+3)+\cdots\cdots+\{6(m-1)+3\}\\
&=6(1+2+\cdots\cdots+m-1)+3\times m\\
&=6\times\frac{1}{2}\times m(m-1)+3m=3m^2\ (m\geqq 1)
\end{aligned}
$$

$m=0$ も成立。

以下同様。 ∎

§4. p_n を求める

①, ②, ③の公式より P_n の個数を求めることができる。

○ $p_{2m}=q_m=r_m$

○ $p_{2m+1}=p_{2m+4}=q_{m+2}=r_{m+2}$

(例) $p_{12}=r_6=3$, $p_7=p_{10}=r_5=2$

§5. おわりに

整数分割が, 古代エジプトひもと結びつくとは, きっと「赤いひも」で数学は, つながっているのでしょう。

入試問題は, 次に四角形の場合を問います。

一般的には, 母関数を用いて考えていきますが, 上記のような解法も高校生にも十分理解できる範囲なので, おもしろいのではないでしょうか。

《参考文献》

〔1〕 整数の分割 ジョージ・アンドリュース, キムモ・エリクソン著 数学書房

〔2〕 組合せ数学入門Ⅰ C.L.リウ著 共立全書

〔3〕 http://www.ctk.ne.jp/~kamei-ki/index.htm

(岡山県 金光学園中学高等学校)