■可換な行列　(石濱文武先生)

〔定理〕 2 次正方行列 A (ただし $A \neq kE$) と 2 次正方行列 X が可換, すなわち $AX=XA$ を満たす条件は, X が A の高々 1 次式で表されることである。E は単位行列を表す。

(証明)

(必要性) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A \neq kE$, $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ とおく。

$AX=XA$ より $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

両辺の対応する成分を等置して整理すると

(＊)　$bz=cy$, $(a-d)y=b(x-u)$, $(a-d)z=c(x-u)$

(i)　$b=c=0$ のとき

$A \neq kE$ より $a \neq d$ で (＊) は $y=z=0$ と同値になるから

$$X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}=\frac{x-u}{a-d}A+\frac{-dx+au}{a-d}E$$

(x, u は任意)

(ii)　$b \neq 0$ または $c \neq 0$ のとき

(イ)　$b \neq 0$ のとき

(＊) は $z=\frac{c}{b}y$, $u=x-\frac{a-d}{b}y$ と同値になるから

$$X=\begin{pmatrix} x & y \\ \frac{c}{b}y & x-\frac{a-d}{b}y \end{pmatrix}=\frac{y}{b}A+\left(x-\frac{a}{b}y\right)E \quad (x,\ y \text{ は任意})$$

(ロ)　$c \neq 0$ のとき

(＊) は $y=\frac{b}{c}z$, $u=x-\frac{a-d}{c}z$ と同値になるから

$$X=\begin{pmatrix} x & \frac{b}{c}z \\ z & x-\frac{a-d}{c}z \end{pmatrix}=\frac{z}{c}A+\left(x-\frac{a}{c}z\right)E$$

(x, z は任意)

(十分性)　$mA+nE$ が A と可換なことは自明。■

〔**Remark**〕 可換条件 (＊) は連比を用いて $(a-d):b:c=(x-u):y:z$ と簡潔に書ける。

定理そのものは既知であるが, Remark で示された連比表現は極めて実用的である。尚, 連比の式は「ある項が 0 のときは対応する項も 0」と解釈する。すなわち

$a=d \Longleftrightarrow x=u$, $b=0 \Longleftrightarrow y=0$, $c=0 \Longleftrightarrow z=0$

(神奈川県立湘南高等学校)