■三角関数の加法定理のエレガントな証明

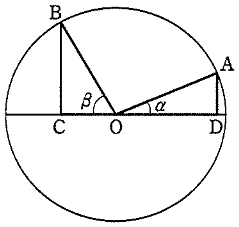
（高木和久先生）

三角関数の加法定理の証明では，2点間の距離の公式やトレミーの定理などを用いた色々なものが知られている。ここでは，加法定理までに生徒が学習した三角関数の知識のみを用いる新しい証明方法を紹介する。

正弦の加法定理から余弦と正接の加法定理を導くことができるので，本稿では α，β が鋭角のときに

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

が成り立つことを示す。



(証明)　点Oを中心とする半径1の円を描き，円周上に2点A，Bをとって図のように直角三角形AODとBOCを作る。

円の半径は1であるから

$AD=\sin\alpha$，$OD=\cos\alpha$，$BC=\sin\beta$，$OC=\cos\beta$

が成り立つ。三角形AODの面積を S_1，三角形BOCの面積を S_2 とすると

$$S_1=\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha,\quad S_2=\frac{1}{2}\sin\beta\cos\beta$$

2点A，Bを結んで三角形AOBを作る。その面積を S_3 とすると

$$S_3=\frac{1}{2}\times1^2\times\sin\{180^\circ-(\alpha+\beta)\}=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$$

台形ABCDの面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)\\&=\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\beta\cos\beta\\&\quad+\frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\\&=S_1+S_2+\frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

$S=S_1+S_2+S_3$ であるから

$$S_3=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$

$$\therefore\quad\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$ ■

《参考文献》

〔1〕　池内仁史「三角関数の加法定理のいろいろな証明方法」数研通信 62号 $p.4\sim7$

（高知県　高知工業高等専門学校）