興味深い内容のいろいろ

大塚（おおつか） 秀幸（ひでゆき）
高木（たかぎ） 和久（かずひさ）
石濱（いしはま） 文武（ふみたけ）

■立方数の和が平方数となる整数列

（大塚秀幸先生）

自然数の立方和の公式は有名である。

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \quad \cdots\cdots(1)$$

このように整数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に対し

$$\sum_{k=1}^{n} {a_k}^3={b_n}^2 \quad \cdots\cdots(\mathrm{A})$$

を満たすものについて考えよう。

次の２つは確かに成り立つが面白くない。

$$\sum_{k=1}^{n} 0^3=0^2,\quad \sum_{k=1}^{n}\{(-1)^{k+1}\}^3=\begin{cases}1^2\ (n\text{ は奇数})\\ 0^2\ (n\text{ は偶数})\end{cases}$$

(A)において「$\{a_n\}$ は狭義単調増加 $(a_{n+1}>a_n)$」という条件を加えた場合，(1)以外のものが存在するのだろうか。

まず，フィボナッチ数の定義を確認する。

（定義）　以下の漸化式を満たす F_n をフィボナッチ数とよぶ。

$$F_0=0,\ F_1=1,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

次の公式はよく知られている。

$$\sum_{k=1}^{n} F_k=F_{n+2}-1,\qquad \sum_{k=1}^{n} {F_k}^2=F_nF_{n+1}$$

また，私と中村滋先生によるフィボナッチ数の６乗和の新公式というのもある。

$$\sum_{k=1}^{n} {F_k}^6=\frac{{F_n}^5F_{n+3}+F_{2n}}{4}$$

これらの公式が，自然数の和・平方和・６乗和と比べても非常に見やすい形になっているのは興味深い。これらはフィボナッチ数の持つ１つの側面に過ぎないが，フィボナッチ数の世界は多くの豊かな性質を内包していることで知られている。

さて，私はフィボナッチ数の和を研究する過程で(A)を満たすものがあることに気づいた。

（定理）　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(F_kF_{k+1})^3=\left(\frac{F_nF_{n+1}F_{n+2}}{2}\right)^2$

（証明）　まず　${F_{k+2}}^2-{F_{k-1}}^2$

$$\begin{aligned}&=(F_{k+2}+F_{k-1})(F_{k+2}-F_{k-1})\\&=(F_{k+1}+F_k+F_{k-1})(F_{k+1}+F_k-F_{k-1})\\&=2F_{k+1}\cdot 2F_k\\&=4F_kF_{k+1}\end{aligned}$$

よって　$(F_kF_{k+1}F_{k+2})^2-(F_{k-1}F_kF_{k+1})^2$

$$\begin{aligned}&=(F_kF_{k+1})^2({F_{k+2}}^2-{F_{k-1}}^2)\\&=4(F_kF_{k+1})^3\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}4\sum_{k=1}^{n}(F_kF_{k+1})^3&=\sum_{k=1}^{n}\{(F_kF_{k+1}F_{k+2})^2-(F_{k-1}F_kF_{k+1})^2\}\\&=(F_nF_{n+1}F_{n+2})^2\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}(F_kF_{k+1})^3=\left(\frac{F_nF_{n+1}F_{n+2}}{2}\right)^2 \quad ■$$

証明からわかるように，さらに一般化できることもわかる。すなわち，

$G_0=0$，$G_1=a$，$G_{n+2}=G_{n+1}+G_n$（a は任意の整数）を満たす数列 $\{G_n\}$ に対しても，以下のような同様の関係式が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{n}(G_kG_{k+1})^3=\left(\frac{G_nG_{n+1}G_{n+2}}{2}\right)^2$$

《参考文献》

〔１〕 H. Ohtsuka and S. Nakamura, A NEW FORMULA FOR THE SUM OF THE SIXTH POWERS OF FIBONACCI NUMBERS, Congressus Numerantium Vol. 201 (2010)

（東京都　元文教大学付属高等学校）