# 余弦の和と積

木村（きむら）　嘉宏（よしひろ）

## §1. はじめに

正多角形について考察する中で，余弦の和と積について，興味深い計算結果を得たので紹介します。

## §2. 余弦の和

$x^{2n+1}=1$ の虚数解を調べることにより，

$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}$ であることを証明する。

まず，$n$ 次方程式の解と係数の関係について，整理しておく。

$n$ 次方程式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ が $x=\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ を解にもつとき

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$
$$=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

ここで，$x^{n-1}$ の項の係数を比較すると

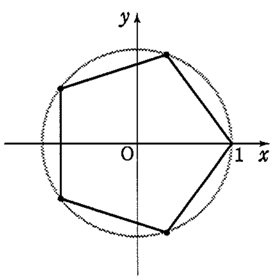
$$a_{n-1}=-a_n(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$$

これより　$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$

では，具体的な例について考察してみる。

$x^5=1$ を満たす虚数解は

$$x=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5},\ \cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5},$$
$$\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5},\ \cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$$




これらは

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$$

より $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ の解であるから，解と係数の関係より

$$\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)+\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$$
$$+\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right)+\left(\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}\right)=-1$$

$\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$，$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ であるから左辺を整理すると

$$2\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}\right)=-1$$

これより　$\underline{\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}}$

同じ手法を用いて，次のように一般化できる。

自然数 $n$ に対して，$x^{2n+1}=1$ を満たす虚数解は

$x=\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{2n+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n)$

これらは $x^{2n+1}-1=(x-1)(x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x+1)=0$ より $x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x+1=0$ の解であるから，解と係数の関係より

$$\sum_{k=1}^{2n}\left(\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{2n+1}\right)=-1$$

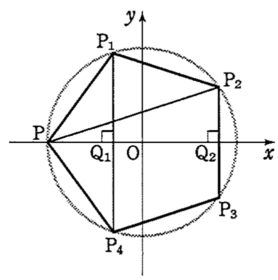
左辺を整理した上で，両辺に $\frac{1}{2}$ を掛けると

$$\underline{\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}}$$

## §3. 余弦の積

次に，余弦の積の計算結果を示す。

まず，正五角形を用いて，$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$ の値を調べてみよう。



上の図において，正五角形の１辺の長さを $l_1$，対角線の長さを $l_2$ とすると

$$\angle P_2PQ_2=\frac{\pi}{10},\ \angle P_1PQ_1=\frac{3\pi}{10}$$

であるから

$$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{l_1}{2l_2},\ \sin\frac{3\pi}{10}=\frac{l_2}{2l_1}$$

これより　$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4}$

ここで

$$\sin\frac{\pi}{10}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$\sin\frac{3\pi}{10}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{5}$$

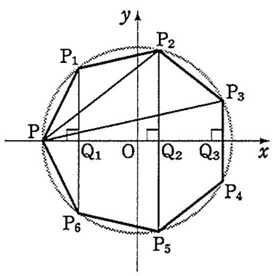
であるから

$$\underline{\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}}$$

同じようにして，正七角形を用いると

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$$

の値を求めることができる。




上の図において，正七角形の１辺の長さを $l_1$，対角線の長さを短い順に $l_2$，$l_3$ とすると

$$\angle P_3PQ_3=\frac{\pi}{14},\ \angle P_2PQ_2=\frac{3\pi}{14},\ \angle P_1PQ_1=\frac{5\pi}{14}$$

であるから

$$\sin\frac{\pi}{14}=\frac{l_1}{2l_3},\ \sin\frac{3\pi}{14}=\frac{l_3}{2l_2},\ \sin\frac{5\pi}{14}=\frac{l_2}{2l_1}$$

これより　$\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}=\frac{1}{8}$

ここで

$$\sin\frac{\pi}{14}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{14}\right)=\cos\frac{3\pi}{7}$$

$$\sin\frac{3\pi}{14}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{14}\right)=\cos\frac{2\pi}{7}$$

$$\sin\frac{5\pi}{14}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{14}\right)=\cos\frac{\pi}{7}$$

であるから

$$\underline{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}}$$

正九角形においては，１辺の長さを $l_1$，対角線の長さを短いものから順に $l_2$，$l_3$，$l_4$ とすると

$$\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{3\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18}$$

$$=\frac{l_1}{2l_4}\cdot\frac{l_3}{2l_3}\cdot\frac{l_4}{2l_2}\cdot\frac{l_2}{2l_1}=\frac{1}{16}$$

となる。

$$\sin\frac{(2k-1)\pi}{18}=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{(2k-1)\pi}{18}\right\}=\cos\frac{(5-k)}{9}\pi$$

であるから

$$\underline{\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{16}}$$

一般に，正 $2n+1$ 角形 $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ の１辺の長さを $l_1$，対角線の長さを短い順に $l_2$，$l_3$，…，$l_n$ とすると

$$\sin\frac{\pi}{4n+2}=\frac{l_1}{2l_n}$$

$$\sin\frac{3\pi}{4n+2}=\frac{l_3}{2l_{n-1}}$$

$$\sin\frac{5\pi}{4n+2}=\frac{l_5}{2l_{n-2}}$$

$l_{2m-1}$ 昇順

……………

……………

$$\sin\frac{(2n-5)\pi}{4n+2}=\frac{l_6}{2l_3}$$

$$\sin\frac{(2n-3)\pi}{4n+2}=\frac{l_4}{2l_2}$$

$$\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n+2}=\frac{l_2}{2l_1}$$

$l_{2m}$ 降順

これらを掛け合わせると，分母分子ともに $l_1$ から $l_n$ までの積が生じ，約分すると計算結果は $\frac{1}{2^n}$ となる。

$$\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n+2}=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{(2k-1)\pi}{4n+2}\right\}$$

$=\cos\frac{(n-k+1)\pi}{2n+1}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ であるから

$\underline{\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}}$　なお，$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ であるから，この等式は $n=1$ の場合も成り立つ。

（京都府立網野高等学校間人分校）