記号 log を使わない対数の授業

石川（いしかわ） 光一（こういち）

§0. はじめに

1614 年，20 年間にも及ぶ努力の結晶である著書「デスクリプティオ」を発表したネピアは，同書において「巨大な数の掛け算，割り算ほど骨の折れる仕事はない。私はこの苦痛を取り除く方法を発明した。」と宣言した。「対数」の誕生である。(改訂版「数学II」数研出版 p.139)

とはいうものの，生徒が「対数の凄さ」を感じることは難しいものです。そこで，今回そこのところに重点を置いた授業 (§1〜§4) を行いました。

§1. 常用対数とは？

$10^p=M$ について，この p の値を 10 を底とする M の対数といい，単に M の常用対数ともいう。また，M をこの対数の真数という。

> **問題 1** 教科書巻末の常用対数表を利用して，次の [ ] に適当な数を入れなさい。
> (1) 2 の常用対数は [ ] なので
> $2=10^{[\quad]}$
> (2) 3.77 の常用対数は [ ] なので
> $3.77=10^{[\quad]}$

§2. 常用対数を利用した掛け算

常用対数表によれば，

$$2.53=10^{0.4031},\quad 3.77=10^{0.5763}$$

なので

$$2.53\times3.77=10^{0.4031}\times10^{0.5763}$$
$$=10^{0.4031+0.5763}=10^{0.9794}$$

ここで常用対数表を調べると $10^{0.9794}=9.54$ であることがわかるから，$2.53\times3.77=9.54$ ということになる。

※ 実際に 2.53×3.77 を計算した結果は 9.5381 である。

> **問題 2** 常用対数表を利用して，次の掛け算をしなさい。また，実際に計算した結果と比べなさい。
> (1) 1.03×4.82
> (2) 9.54×2.53
> (3) 25.3×37.7

正確さにはやや欠けるものの，対数を用いると面倒なかけ算が楽に計算できる。

§3. 常用対数を利用した累乗

$$2.53^{100}=(10^{0.4031})^{100}=10^{40.31}$$
$$=10^{0.31}\times10^{40}=2.04\times10^{40}$$

である。

つまり，2.53 の 100 乗はおよそ

20400000000000000000000000000000000000000

になるということである。

> **問題 3** 対数表を利用して，次の累乗を計算しなさい。
> (1) 3.77^{50}
> (2) 95.4^{30}
> (3) 253^{100}

コンピューターの力を借りない限り，100 乗を実際に計算するということは現実には無理なことである。

しかし，近似値とはいえ，対数はそれを事もなげにやってしまうのである。

「ネピアの対数はヨーロッパ中の科学者から絶大な賛美を持って迎えられた。」(改訂版「数学II」数研出版 p.139)

§4. 大学入試問題を解く

入試問題では対数表の代わりに $\log_{10}2=0.3010$ と $\log_{10}3=0.4771$ が与えられていることが多い。

すなわち，$2=10^{0.3010}$，$3=10^{0.4771}$ ということであるが，このことから次のように 4，5，6，8，9 の常用対数が得られる。

$$4=2^2=(10^{0.3010})^2=10^{0.3010\times2}=10^{0.6020}$$

$5=10\div2=10^1\div10^{0.3010}=10^{1-0.3010}=10^{0.6990}$

$6=2\times3=10^{0.3010}\times10^{0.4771}$

$=10^{0.3010+0.4771}=10^{0.7781}$

$8=2^3=(10^{0.3010})^3=10^{0.3010\times3}=10^{0.9030}$

$9=3^2=(10^{0.4771})^2=10^{0.4771\times2}=10^{0.9542}$

しかし，7の常用対数は求められないので，問題を解くのに必要ならば $\log_{10}7=0.8451$ というように与えられることになる。

要は，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ が与えられているということは，次のような対数表が用意されていることと同じである。

真数	1	2	3	4	5
対数	0	.3010	.4771	.6020	.6990

真数	6	7	8	9	10
対数	.7781		.9030	.9542	1

問題4　近似値 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ を利用して

(1)　18^{35} の桁数を求めよ。

(2)　18^{35} の最高位の数字が8であることを示せ。

〔1997　北海道大〕

【解答】

(1)　$18=2\times3^2=10^{0.3010}\times(10^{0.4771})^2=10^{1.2552}$

なので，

$18^{35}=(10^{1.2552})^{35}=10^{43.9320}$

となる。したがって，

$10^{43}\leqq18^{35}<10^{44}$

より 18^{35} の桁数は44桁である。

(2)　$8\times10^{43}=10^{0.9030}\times10^{43}=10^{43.9030}$

$9\times10^{43}=10^{0.9542}\times10^{43}=10^{43.9542}$

(1)より

$18^{35}=10^{43.9320}$

なので

$8\times10^{43}\leqq18^{35}<9\times10^{43}$

が成り立つ。

したがって，18^{35} の最高位の数字は8である。

§5. おわりに

対数の単元が終わりますと，生徒は log の計算はそれなりにできるようになります。しかし，いつも対数の凄さを生徒に伝えられていないな，と感じていました。

そこで，「対数って凄いんだ！」ということを生徒に伝えたいと思って工夫していましたら，行き着いた先が「記号 log を使わない対数の授業」となりました。

この後，教科書に沿った説明もしていますが，これまでよりも対数への抵抗感は少ないように感じました。

と言っても，それは私のこの教材への思い入れが強いことを察した生徒たちの気遣いかもしれません。

《参考文献》

〔1〕 改訂版数学II　数研出版

（北海道　大麻高等学校）