2つの放物線における共通接線

吉田 亮介

§1. 入試問題から

> a を正の実数とし，2つの放物線 $C_1: y=x^2$，$C_2: y=x^2-4ax+4a$ を考える。
> (1) C_1 と C_2 の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ。
> (2) 2つの放物線 C_1，C_2 と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ。〔2010 北海道大〕

2つの放物線に接する共通接線が話題になっています。

以下は接線の方程式を2本立てて係数比較するオーソドックスな解法です。

(解答) (1) (接線の方程式を2本立てて係数比較する解法)

C_1 と ℓ の接点を $(p,\ p^2)$ とすると，接線の方程式は $y=2p(x-p)+p^2$ より

$$y=2px-p^2 \quad \cdots\cdots①$$

C_2 と ℓ の接点を $(q,\ q^2-4aq+4a)$ として，同様に計算すると

$$y=(2q-4a)x-q^2+4a \quad \cdots\cdots②$$

①と②の右辺の係数を比較して

$$\begin{cases} 2p=2q-4a \\ -p^2=-q^2+4a \end{cases}$$

これを p，q について解くと $p=1-a$，$q=1+a$

よって，ℓ の方程式は $y=2(1-a)x-(1-a)^2$ 答

次に視点を変えて，2つの頂点を通る直線に着目して別解を示します。

(別解) (「(共通接線の傾き)=(2つの頂点を通る直線の傾き)」とする解法)

(接線 ℓ の傾き)$=$(C_1 の頂点 $(0,\ 0)$ と C_2 の頂点 $(2a,\ -4a^2+4a)$ を通る直線の傾き)

$$=\frac{-4a^2+4a}{2a}$$

$$=2(1-a)$$

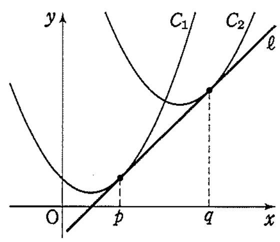
$f(x)=x^2$，$g(x)=x^2-4ax+4a$ とおくと

$f'(p)=g'(q)=2(1-a)$ より $p=1-a$，$q=1+a$

以下最初の(解答)と同様。

(2) 略

§2. 別解で用いた「(共通接線の傾き)=(2つの頂点を通る直線の傾き)」の証明



$C_1: f(x)$
$=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$
$C_2: g(x)$
$=ax^2+dx+e\ (a\neq0)$

C_1 と C_2 の共通接線 ℓ を $y=\alpha x+\beta$ とする。

C_1 と ℓ が接するので

$$ax^2+(b-\alpha)x+c-\beta=a(x-p)^2$$

$$ax^2+(b-\alpha)x+c-\beta=ax^2-2apx+ap^2$$

係数比較して

$$\begin{cases} b-\alpha=-2ap \\ c-\beta=ap^2 \end{cases} \text{より} \begin{cases} b=\alpha-2ap & \cdots① \\ c=\beta+ap^2 & \cdots② \end{cases}$$

同様に C_2 と ℓ が接するので

$$ax^2+(d-\alpha)x+e-\beta=a(x-q)^2$$

$$ax^2+(d-\alpha)x+e-\beta=ax^2-2aqx+aq^2$$

係数比較して

$$\begin{cases} d-\alpha=-2aq \\ e-\beta=aq^2 \end{cases} \text{より} \begin{cases} d=\alpha-2aq & \cdots③ \\ e=\beta+aq^2 & \cdots④ \end{cases}$$

ここで C_1 の頂点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$ と C_2 の頂点 $\left(-\dfrac{d}{2a},\ -\dfrac{d^2-4ae}{4a}\right)$ を通る直線の傾きを求めると

(2つの頂点を通る直線の傾き)

$$=\frac{-\dfrac{b^2-4ac}{4a}-\left(-\dfrac{d^2-4ae}{4a}\right)}{-\dfrac{b}{2a}-\left(-\dfrac{d}{2a}\right)}$$

$$=\frac{(d+b)(d-b)+4a(c-e)}{2(d-b)}$$

$$=\frac{\{2\alpha-2a(p+q)\}\{2a(p-q)\}+4a\{a(p+q)(p-q)\}}{4a(p-q)}$$

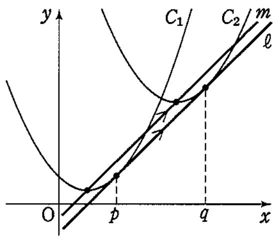
(∵ ①, ②, ③, ④)

$$=\frac{2a\{2\alpha-2a(p+q)\}+4a^2(p+q)}{4a}$$

$=\alpha=$(共通接線の傾き)

となります。 終

図でとらえると以下のようになります。



2 直線 ℓ と m について

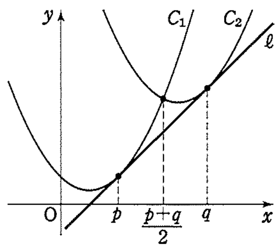
$\ell /\!/ m$

§3. C_1 と C_2 の共有点の x 座標について

冒頭の問題の(2)では積分区間を求めるために C_1 と C_2 の共有点の x 座標が必要になります。

計算では，y を消去して $x^2=x^2-4ax+4a$ より $x=1$ とすぐに求まりますが，以下の図のように中点になるという事実を押さえておけば

$$x=\frac{p+q}{2}=\frac{(1-a)+(1+a)}{2}=1$$



となります。この事実を証明します。

C_1 : $f(x)$
$=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$

C_2 : $g(x)$
$=ax^2+dx+e\ (a\neq0)$

(証明)

y を消去して

$ax^2+bx+c=ax^2+dx+e$

$(b-d)x=e-c$

$$x=\frac{e-c}{b-d}\quad\left(∵\quad -\frac{b}{2a}\neq-\frac{d}{2a}\ \text{より}\ b\neq d\right)$$

$$=\frac{(\beta+aq^2)-(\beta+ap^2)}{(\alpha-2ap)-(\alpha-2aq)}$$

$$=\frac{a(q+p)(q-p)}{2a(q-p)}=\frac{p+q}{2}$$ 終

(北海道　帯広三条高等学校)