3辺の長さが等差数列をなす三角形とその面積

久末（ひさすえ）　正樹（まさき）

§1. はじめに

3辺の長さが整数でかつ等差数列をなすような三角形で，面積が整数になるようなものを考えてみたので紹介する。

§2. 3辺の長さと面積

まず3辺の長さを $a-d$，a，$a+d$ をおく。この3辺を三角形とする面積 S はヘロンの公式より

$s=\dfrac{(a-d)+a+(a+d)}{2}=\dfrac{3a}{2}$ とすると

$S=\sqrt{s\{s-(a-d)\}(s-a)\{a-(a+d)\}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}\,a}{4}\sqrt{a^2-4d^2}$ となる。

§3. 面積が整数であるという条件

ここで面積が整数になるためには，少なくとも a は偶数である必要があり，そこで $a=2m$（m は正の整数）とおくことができ，式を整理すると $S=m\sqrt{3(m^2-d^2)}$ となる。面積が整数になるためには根号の中が平方数である必要があるので $m^2-d^2=3t^2$（ただし t は正の整数）と書くことができ，この式を変形して

$m^2-3t^2=d^2$ ……(＊)

とする。これはPellの方程式である。$(m,\ t)=(x_1,\ y_1)$ を(＊)のひとつの解とする（解は存在する。例えば $x_1=2d$，$y_1=d$）

このとき $\dfrac{x_n+\sqrt{3}\,y_n}{d}=\left(\dfrac{x_1+\sqrt{3}\,y_1}{d}\right)^n$ と定義する。

このとき，$(m,\ t)=(x_n,\ y_n)$ が(＊)を満たすことを数学的帰納法により以下に示す。

§4. 数学的帰納法による証明

$n=1$ のときは明らかに成り立つ。

$n=k$ のとき成り立つと仮定すると，$x_k{}^2-3y_k{}^2=d^2$

$n=k+1$ のとき，まずは x_{k+1}，y_{k+1} を求めよう。帰納法の仮定により

$$\frac{x_{k+1}+\sqrt{3}\,y_{k+1}}{d}=\left(\frac{x_1+\sqrt{3}\,y_1}{d}\right)^{k+1}$$
$$=\left(\frac{x_1+\sqrt{3}\,y_1}{d}\right)^{k}\left(\frac{x_1+\sqrt{3}\,y_1}{d}\right)$$
$$=\left(\frac{x_k+\sqrt{3}\,y_k}{d}\right)\left(\frac{x_1+\sqrt{3}\,y_1}{d}\right)$$
$$=\frac{x_1x_k+3y_1y_k+\sqrt{3}\,(x_1y_k+x_ky_1)}{d^2}$$

ゆえに　$x_{k+1}=\dfrac{x_1x_k+3y_1y_k}{d}$，$y_{k+1}=\dfrac{x_1y_k+x_ky_1}{d}$

が成り立つ。……(＊＊)

これらを(＊)に代入すると，

$$\left(\frac{x_1x_k+3y_1y_k}{d}\right)^2-3\left(\frac{x_1y_k+x_ky_1}{d}\right)^2$$
$$=\frac{x_1{}^2x_k{}^2+6x_1x_ky_1y_k+9y_1{}^2y_k{}^2}{d^2}$$
$$-3\cdot\frac{x_1{}^2y_k{}^2+2x_1x_ky_1y_k+x_k{}^2y_1{}^2}{d^2}$$
$$=\frac{x_1{}^2(x_k{}^2-3y_k{}^2)-3y_1{}^2(x_k{}^2-3y_k{}^2)}{d^2}$$
$$=\frac{(x_1{}^2-3y_1{}^2)(x_k{}^2-3y_k{}^2)}{d^2}=\frac{d^2\cdot d^2}{d^2}=d^2$$

となり，(＊)を満たすことがわかる。

§5. x_n，y_n と x_{n+1}，y_{n+1} の関係

前述のように $x_1=2d$，$y_1=d$ として(＊＊)に代入すると $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ が得られた。

以上を表にまとめてみると，次のようになる。

m	t	$a-d$	a	$a+d$	S
$2d$	d	$3d$	$4d$	$5d$	$6d^2$
$7d$	$4d$	$13d$	$14d$	$15d$	$84d^2$
$26d$	$15d$	$51d$	$52d$	$53d$	$1170d^2$
$97d$	$56d$	$193d$	$194d$	$195d$	$16296d^2$
$362d$	$209d$	$723d$	$724d$	$725d$	$226974d^2$

なお $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}$

$$=\cdots\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$

であり，固有値は

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+1=0 \text{ より } \lambda=2\pm\sqrt{3}$$

であるから，固有ベクトル $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ を用いて行列 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ を対角化できる。

§6. 結論

最終的には $m=\frac{1}{2}\{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\}d$,

$$t=\frac{\sqrt{3}}{6}\{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\}d$$

3辺の長さは $\{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\}d$,

$\{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\pm1\}d$

であり，面積は

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(2+\sqrt{3})^{2n}-(2-\sqrt{3})^{2n}\}d^2$$

が得られる。

（北海道　旭川藤女子高等学校）