預金を内分する　ーお金の計算を対数で考えるー

正田（しょうだ）　隆之（たかゆき）

§0. はじめに

物理現象を数学の題材として扱うことは多い。一方，お金は物の対価であるから，物理量の変化やその性質がお金の計算に反映されているはずである。したがって，お金についても数学の題材として様々に扱えると考える。

預金はある計算方法に基づいて利息が付いて月日が経つにつれて増加する。すなわち，時間の関数として表され，その関数によりある時点における預金額を算出できる。

ここで，ある預金をして，2年後の元利合計が A_2 円，7年後の元利合計が A_7 円となったとする。このとき，A_2 と A_7 を用いて，5年後の元利合計 A_5 円を表すにはどのように考えればよいだろうか。

5年は，2年と7年との間を 3：2 に内分する時点であるから，内分の公式を使って

$$A_5=\frac{2A_2+3A_7}{3+2}$$

となるが，この計算方法は適切といえるだろうか。

ところで，利息計算には単利計算と複利計算とがある。T 年後の元利合計は，T の関数として表されるが，どちらの利息計算によるかでその関数は異なる。したがって，A_5 の値の求め方もそれぞれ異なり，実際，単利計算の場合は線形補完で，複利計算の場合は対数補完で A_5 の値を求める。以下，線形補完，対数補完，それぞれの補完方法から導出される相加平均と相乗平均，単利計算が複利計算の1次の近似であること，そして，対数の利用について解説する。

§1. 線形補完

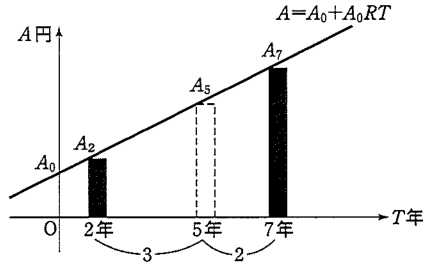
一般に，元金 A_0 円を金利 R (＝$100R$％) で T 年間預金した場合の利息は次の式で計算できる。

利息＝A_0RT

また，「元金＋利息」の金額を単利計算の元利合計といい，次のように計算できる。

単利計算の元利合計　A_0+A_0RT

この式によれば，元利合計は1年あたり A_0R 円ずつ加算されて増加している。つまり，単利計算では元利合計の変化を足し算で定義している。



金利 R が一定であるとして，元利合計を A 円とすると，A は期間 T 年の1次関数

$$A=A_0+A_0RT$$

となる。そして，そのグラフは直線を表すから，A_5 の理論値は内分の公式により次のように求められる。

$$A_5=\frac{2A_2+3A_7}{5}$$

このように，線分の内分によって理論値を求めることを線形補完という。

(例1）　ある預金をして1カ月後の元利合計が 100,020 円，9カ月後の元利合計が 100,060 円となったとする。この間，金利が一定でかつ単利計算であるとして，7カ月後の元利合計を線形補完によって求める。7カ月は，1カ月と9カ月の間を 3：1 に内分する時点であるから，求める値は次のとおりである。

$$\frac{1\times100{,}020+3\times100{,}060}{3+1}=100{,}050\text{ 円}$$

§2. 対数補完

ところで，利息計算は複利計算が原則であるから，それに従えば元利合計は T の1次関数とはならない。つまり，直線のグラフとはならない。したがっ

て，その理論値を線形補完によって求めるという方法は厳密には正しくない。

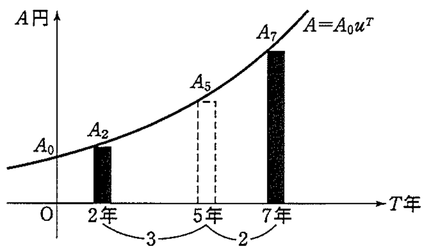
元金 A_0 円を金利 R (=100R%) で，1年ごとの複利計算で T 年間預金した場合，元利合計は次の式で与えられる。

複利計算の元利合計　$A_0(1+R)^T$

ここで，$u=1+R$ とすると，元利合計の式は次のようになる。

複利計算の元利合計　A_0u^T

この式によれば，元利合計は1年あたり u 倍されて増加している。つまり，複利計算では元利合計の変化を掛け算で定義している。



金利 R が一定であるとすれば，u は一定であり，2年後および7年後の元利合計 A_2 と A_7 はそれぞれ次の式で与えられる。

$$A_2=A_0u^2,\quad A_7=A_0u^7$$

ここで，両辺の自然対数をとると，次の式を得る。

$$\log A_2=\log A_0+2\log u$$
$$\log A_7=\log A_0+7\log u$$

同様に考えると，5年後の元利合計 A_5 は

$$A_5=A_0u^5$$

であるから，両辺の自然対数をとって

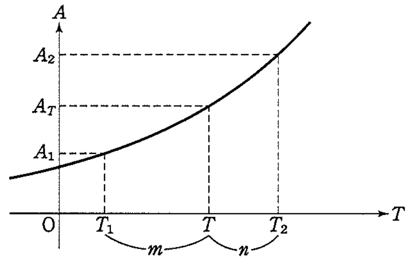
$$\log A_5=\log A_0+5\log u=\frac{5\log A_0+25\log u}{5}$$
$$=\frac{2(\log A_0+2\log u)+3(\log A_0+7\log u)}{3+2}$$
$$=\frac{2\log A_2+3\log A_7}{3+2}$$

これは，$\log A_2$ と $\log A_7$ の線形補完により $\log A_5$ を求められることを示している。

よって，　$\log A_5=\log\sqrt[5]{A_2{}^2A_7{}^3}$

$$\therefore\quad A_5=\sqrt[5]{A_2{}^2A_7{}^3}$$

このように，対数の線形補完により理論値を求めることを**対数補完**という。



一般に，2つの時点 T_1，T_2 におけるある量の値をそれぞれ A_1，A_2 とすると，時点 T_1，T_2 を $m:n$ に内分する時点 T における値 A_T と A_1，A_2 との対数補完による関係式は次のようになる。

対数補完による関係式

$$\log A_T=\frac{n\log A_1+m\log A_2}{m+n}$$

この関係式が成立するとき，A_1，A_2 から A_T の値を求めることができ，次のようになる。

$$A_T=\sqrt[m+n]{A_1{}^nA_2{}^m}$$

なお，このようにして求められる値は，対数補完する際の底のとり方によらない。

(例2)　ある預金をしたところ，1年後の元利合計が100,300円，7年後の元利合計が102,100円となった。この間金利が一定で，かつ複利計算であるとして，5年後の元利合計を対数補完によって求める。

5年は，1年と7年の間を 2:1 に内分する時点であるから，求める値を A_5 とすると次の方程式が成り立つ。

$$\log A_5=\frac{1\times\log 100{,}300+2\times\log 102{,}100}{2+1}$$

したがって，A_5 の値は次のように得られる。

$$A_5=\sqrt[3]{100{,}300^1\times102{,}100^2}\fallingdotseq 101{,}496\text{ 円}$$

§3. 相加平均と相乗平均

2つの値の平均は，1:1 の内分であるから，2つの値 a と b の平均値 m をそれぞれの補完方法により求めると次のようになる。

線形補完の場合　$m=\dfrac{a+b}{2}$

対数補完の場合　$\log m=\dfrac{\log a+\log b}{2}$

$$=\log a^{\frac{1}{2}}+\log b^{\frac{1}{2}}=\log\sqrt{ab}$$

$$\therefore\quad m=\sqrt{ab}$$

これにより，線形補完による平均が相加平均で，対数補完による平均が相乗平均であることがわかる。

単利計算のように変化を足し算で考えている値の平均は相加平均で定義し，複利計算のように変化を掛け算で考えている値の平均は相乗平均で定義するのが適切であるといえる。

§4. 単利計算は複利計算の１次の近似

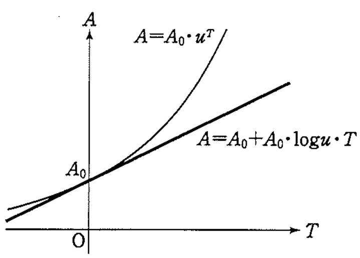
一般に物理現象では変化を掛け算で考える。したがって，物の対価である金額の変化も必然的に掛け算で考えることになる。だから，利息計算は複利が原則となる。しかし，現実的には単利計算も存在する。特に，１年以下の短期間の利息は単利計算をすることが多い。

いま，預け入れ時点($T=0$年)の元金をA_0円，１年当たりの元利合計がu倍ずつされるとし，複利計算の元利合計をTの関数　$f(T)=A_0u^T$
とする。ここで，　$f'(T)=A_0u^T\log u$
であることから，次の１次の近似式を得る。

$$f(0+T)\fallingdotseq f(0)+f'(0)\cdot T=A_0+(A_0\log u)\cdot T$$

$$\therefore\quad f(T)\fallingdotseq A_0+A_0\cdot\log u\cdot T$$

これは，年利 $R=\log u$ として単利計算で元利合計を求める式である。すなわち，複利計算の１次の近似が単利計算になるといえる。したがって，Tが十分に0に近いとき，元利合計はこの式で近似できることになる。１年以下の短期間の利息は単利計算で近似しているといえる。



(例３)　元金100,000円を年利0.02(2%)で１年ごとに複利計算をする預金のT年後の元利合計は

$$f(T)=100{,}000\times(1+0.02)^T=100{,}000\times1.02^T$$

であり，また

$$f'(T)=100{,}000\times1.02^T\times\log1.02$$

であるから，

$$f(0+T)\fallingdotseq f(0)+f'(0)\cdot T$$
$$=100{,}000+100{,}000\times\log1.02\times T$$

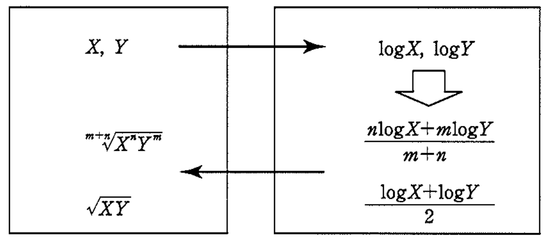
ここで，$\log1.02=0.0198$ として，

$$f(T)\fallingdotseq100{,}000+1{,}980T$$

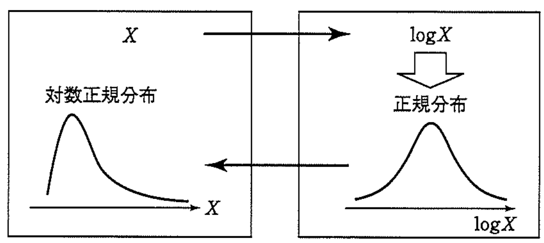
これは，年利0.0198(1.98%)の単利計算による元利合計を表している。

§5. 対数の利用

様々な物理現象の変化は，掛け算で考えるのが普通である。一方で，線形補完や相加平均は変化を足し算で考えることを前提として定義されている。そこで，変化を掛け算で考えている値については，一旦対数をとり，線形補完や相加平均の定義に従って対数補完や相乗平均に定義し直しているといえる。



他の例をあげれば，様々な物理現象が正規分布に従うといわれているが，正規分布の平均値は相加平均だから，変化を掛け算で考えている値Xは，そのままでは正規分布に従うことにはならない。そこで，一旦，Xの対数をとり「$\log X$が正規分布に従うとき，Xは**対数正規分布**に従う」ということになる。



1980年代以降の金融市場において，デリバティブ(金融派生商品)取引が飛躍的に発展した。これに大きく貢献したといわれるブラック・ショールズ・モデルの理論は，金融資産の価格が対数正規分布に従うことに着目して発明された。

ところで，常に厳密に「対数○○」で考えなければいけないかというと，短期間の利息計算を単利計算で近似しているように，変化を掛け算で定義している値でも，線形補完や相加平均で近似してしまうことはよくある。厳密な計算が必要なければ，その方が計算が簡単だからである。

(北海道札幌西高等学校)