$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ の因数分解について

千葉（ちば） 崇憲（たかのり）

§0. はじめに

$(x-y-1)(2x+y+1)$ の展開は次のように計算できます。

$$\begin{array}{cccc} x & -y & -1 & x \\ 2x & +y & +1 & 2x \\ \hline \end{array}$$

$$2x^2 \quad -xy \quad -y^2 \quad -2y \quad -1 \quad -x$$

本稿では因数分解について述べます。

§1. 因数分解の手順

$2x^2-xy-y^2-x-2y-1$ を因数分解します。

① $ax^2+bxy+cy^2$ を因数分解します。

$$2x^2 \quad -xy \quad -y^2 \quad -x \quad -2y \quad -1$$

$$\begin{array}{cc} x & -y \\ 2x & +y \end{array}$$

② cy^2+ey+f を因数分解します。

$$2x^2 \quad -xy \quad -y^2 \quad -x \quad -2y \quad -1$$

$$\begin{array}{ccc} x & -y & -1 \\ 2x & +y & +1 \end{array}$$

$\therefore\ 2x^2-xy-y^2-x-2y-1=(x-y-1)(2x+y+1)$

§2. 従来の方法との比較

$2x^2+xy-3y^2-5x-5y+2$ を因数分解し，従来方法と比較します。

【従来の方法】

与式$=2x^2+(y-5)x-(3y^2+5y-2)$ ……①

$=2x^2+(y-5)x-(y+2)(3y-1)$

$=\{x-(y+2)\}\{2x+(3y-1)\}$ ……②

$=(x-y-2)(2x+3y-1)$ ……③

【提案方法】

$$2x^2 \quad +xy \quad -3y^2 \quad -5x \quad -5y \quad +2$$

$$\begin{array}{ccc} x & -y & -2 \\ 2x & +3y & -1 \end{array}$$

$\therefore\ 2x^2+xy-3y^2-5x-5y+2=(x-y-2)(2x+3y-1)$

従来の方法では①，②，③で生徒は計算ミスしやすいようです。

§3. 留意点

$2x^2-3xy+y^2-x-y-6$ を因数分解します。

① $ax^2+bxy+cy^2$ を因数分解します。

$$2x^2 \quad -3xy \quad +y^2 \quad -x \quad -y \quad -6$$

$$\begin{array}{cc} x & -y \\ 2x & -y \end{array}$$

② ax^2+dx+f を因数分解します。

$$2x^2 \quad -3xy \quad +y^2 \quad -x \quad -y \quad -6$$

$$\begin{array}{ccc} x & -y & -2 \\ 2x & -y & +3 \end{array}$$

$\therefore\ 2x^2-3xy+y^2-x-y-6=(x-y-2)(2x-y+3)$

①で $ax^2+bxy+cy^2=(A_1x+B_1y)(A_2x+B_2y)$ と因数分解し $B_1=B_2$ なので，②で cy^2+ey+f ではなく ax^2+dx+f を因数分解します。②で cy^2+ey+f に着目し因数分解した場合，以下のようなミスが起こります。

②' ax^2+dx+f を因数分解します。

$$2x^2 \quad -3xy \quad +y^2 \quad -x \quad -y \quad -6$$

$$\begin{array}{ccc} x & -y & +3 \\ 2x & -y & -2 \end{array}$$

$\therefore\ 2x^2-3xy+y^2-x-y-6=(x-y+3)(2x-y-2)$

これは正しく因数分解されておりません。

§4. 一般化

$ax^2+bxy+cy^2+dxz+eyz+fz^2$ は3変数2次の同次式です。よって因数分解できるならば，因数は1次の同次式になり，$ax^2+bxy+cy^2+dxz+eyz+fz^2=(A_1x+B_1y+C_1z)(A_2x+B_2y+C_2z)$ となります。必要ならば両辺を z^2 で割り，新しく $x=x/z$, $y=y/z$ とおきます。

次に，3つの場合に分けて考えます。

(i) $B_1 \neq B_2$ の場合

$ax^2+bxy+cy^2=(h_1x+i_1y)(h_2x+i_2y)$

$cy^2+ey+f=(j_1y+k_1)(j_2y+k_2)$

$$\begin{cases} i_1=j_1 \Rightarrow A_1=h_1,\ B_1=i_1=j_1,\ C_1=k_1 \\ \qquad\qquad A_2=h_2,\ B_2=i_2=j_2,\ C_2=k_2 \\ i_1=j_2 \Rightarrow A_1=h_1,\ B_1=i_1=j_2,\ C_1=k_2 \\ \qquad\qquad A_2=h_2,\ B_2=i_2=j_1,\ C_2=k_1 \end{cases}$$

※dx は考慮しなくても良い。

(ii) $B_1=B_2$ の場合 $(h_1 \neq h_2)$

$ax^2+bxy+cy^2=(h_1x+iy)(h_2x+iy)$

$ax^2+dx+f=(j_1x+k_1)(j_2x+k_2)$

$$\begin{cases} h_1=j_1 \Rightarrow A_1=h_1=j_1,\ B_1=i,\ C_1=k_1 \\ \qquad\qquad A_2=h_2=j_2,\ B_2=i,\ C_2=k_2 \\ h_1=j_2 \Rightarrow A_1=h_1=j_2,\ B_1=i,\ C_1=k_2 \\ \qquad\qquad A_2=h_2=j_1,\ B_2=i,\ C_2=k_1 \end{cases}$$

※ey は考慮しなくても良い。

(iii) $B_1=B_2$ の場合 $(h_1=h_2)$

$ax^2+bxy+cy^2=(hx+iy)(hx+iy)$

$ax^2+dx+f=(jx+k_1)(jx+k_2)$

$\Rightarrow A_1=h=j,\ B_1=i,\ C_1=k_1$

$\quad A_2=h=j,\ B_2=i,\ C_2=k_2$

※ey は考慮しなくても良い。

§5. 実践

今回提示した解法は，授業の主流から外れて指導しております。たすきがけの形を保っているので，たすきがけをやっと理解できる学習集団に対しても紹介可能で，生徒は抵抗感が無く解答も早いです。加えて因数分解を2度していることも視覚的に明らかではないでしょうか。特に x^2 の係数が $a \neq 1$ かつ y^2 の係数が $c \neq 1$ のときに有効で，$c<0$ の場合は符号間違いを防げます。限られた時間で正確に解かなければいけない状況に最適だと考え指導しております。

§6. 展望

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ において，b，d，e が0となる場合だけではなく，a，c，f が0の場合でも有効です。しかしながら，授業時間の関係上まだ指導したことはありません。

（北海道　野幌高等学校）