2次曲線の接線について（II）

片岡（かたおか） 宏信（ひろのぶ）

§1. はじめに

2次曲線（楕円，双曲線，放物線）は平行でない2直線 $f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ を表す式

$$f(x,\ y)=ax+by+c,$$
$$g(x,\ y)=dx+ey+f$$

を使って次のようにして表されることが知られている。

楕円：

$$f(x,\ y)^2+g(x,\ y)^2=k \quad (k>0) \qquad (1.1)$$

双曲線：

$$f(x,\ y)g(x,\ y)=k \quad (k\neq 0) \qquad (1.2)$$

放物線：

$$kf(x,\ y)=g(x,\ y)^2 \quad (k\neq 0) \qquad (1.3)$$

2次曲線の接線について(I)では，2次曲線上の点 $(p,\ q)$ における接線を求める処方を求めた。また，式(1.1)，(1.2)，(1.3)の形で書かれた2次曲線の接線の式を，$f(x,\ y)$，$g(x,\ y)$ を使って求めた。

ここでは，2次曲線の曲線外の点から2次曲線に引いた接線の式について考察する。

§2. 曲線外の点から引いた接線（I）

曲線外の点 $(s,\ t)$ から2次曲線に引いた接線の方程式を求める。

(1) 楕円

> 楕円　　　$f(x,\ y)^2+g(x,\ y)^2=k$
> へ点 $(s,\ t)$ から引いた接線の方程式は
> $(f(s,\ t)^2+g(s,\ t)^2-k)(f(x,\ y)^2+g(x,\ y)^2-k)$
> $=\{f(s,\ t)f(x,\ y)+g(s,\ t)g(x,\ y)-k\}^2$　(2.1)

証明：楕円　$f(x,\ y)^2+g(x,\ y)^2=k \quad (k>0)$
の接点 $(p,\ q)$ における接線の方程式は

$$f(p,\ q)f(x,\ y)+g(p,\ q)g(x,\ y)=k \qquad (2.2)$$

接点 $(p,\ q)$ は，楕円上の点だから，

$$f(p,\ q)^2+g(p,\ q)^2=k \qquad (2.3)$$

を満たす。また，接線(2.2)は点 $(s,\ t)$ を通るから

$$f(p,\ q)f(s,\ t)+g(p,\ q)g(s,\ t)=k \qquad (2.4)$$

となる。ここで，

$$f(p,\ q)=P,\ g(p,\ q)=Q,\ f(s,\ t)=S,$$
$$g(s,\ t)=T,\ f(x,\ y)=F,\ g(x,\ y)=G$$

とおくと，

式(2.2)，(2.3)，(2.4)は

$$\begin{cases} PF+QG=k & (2.5) \\ P^2+Q^2=k & (2.6) \\ PS+QT=k & (2.7) \end{cases}$$

と表される。式(2.6)，(2.7)より

$$P=\frac{kS\mp T\sqrt{k(T^2+S^2-k)}}{S^2+T^2}$$

$$Q=\frac{kT\pm|S|\sqrt{k(T^2+S^2-k)}}{S^2+T^2} \quad \text{（複号同順）}$$

これを式(2.5)に代入して整理すると，

$$k^2(SF+TG-S^2-T^2)^2$$
$$=k(T^2+S^2-k)(TF-SG)^2$$

これを適当に変形すると，

$$(S^2+T^2-k)(F^2+G^2-k)=(SF+TG-k)^2$$

になる。したがって，

$$(f(s,\ t)^2+g(s,\ t)^2-k)(f(x,\ y)^2+g(x,\ y)^2-k)$$
$$=\{f(s,\ t)f(x,\ y)+g(s,\ t)g(x,\ y)-k\}^2$$

が導かれる。■

例：円 $x^2+y^2=25$ へ点 A(5, 10) から引いた接線の方程式は式(2.1)より

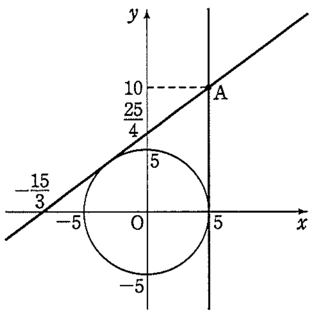
$$(5^2+10^2-25)(x^2+y^2-25)$$
$$=(5x+10y-25)^2$$

これを整理して

$$3x^2-4xy+20y+10x-125=0$$
$$(x-5)(-4y+3x+25)=0$$

したがって，求める接線は

$$x=5, \quad -4y+3x+25=0$$



（図 1 ）

例：楕円 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ に A(0, 2) から引いた接線の方程式は，式 (2.1) より

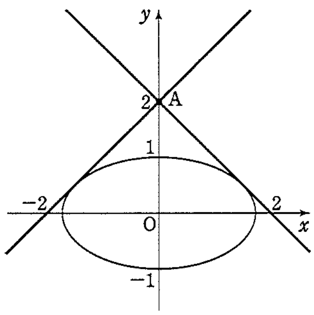
$$\left(\frac{0^2}{3}+2^2-1\right)\left(\frac{x^2}{3}+y^2-1\right)=\left(\frac{0\cdot x}{3}+2y-1\right)^2$$

これを整理して，

$$(y-2-x)(y-2+x)=0$$

したがって，求める接線の式は

$$y=x+2,\ y=-x+2$$



（図 2 ）

(2) 双曲線

> 双曲線 $f(x,\ y)g(x,\ y)=k$
> へ点 $(s,\ t)$ から引いた接線の方程式は
> $$(f(s,\ t)g(s,\ t)-k)(f(x,\ y)g(x,\ y)-k)$$
> $$=\left\{\frac{f(s,\ t)g(x,\ y)+f(x,\ y)g(s,\ t)}{2}-k\right\}^2 \quad (2.8)$$

証明：双曲線 $f(x,\ y)g(x,\ y)=k$ の接点 $(p,\ q)$ における接線の方程式は

$$f(p,\ q)g(x,\ y)+f(x,\ y)g(p,\ q)=2k \quad (2.9)$$

接点 $(p,\ q)$ は，双曲線上の点であるから，

$$f(p,\ q)g(p,\ q)=k \quad (2.10)$$

を満たす。また，接線 (2.9) は点 $(s,\ t)$ を通るから

$$f(p,\ q)g(s,\ t)+f(s,\ t)g(p,\ q)=2k \quad (2.11)$$

となる。ここで，

$$f(p,\ q)=P,\ g(p,\ q)=Q,\ f(s,\ t)=S,$$
$$g(s,\ t)=T,\ f(x,\ y)=F,\ g(x,\ y)=G$$

とおくと，式 (2.9), (2.10), (2.11) は

$$\begin{cases} PG+FQ=2k & (2.12)\\ PQ=k & (2.13)\\ PT+SQ=2k & (2.14)\end{cases}$$

と表される。式 (2.13), (2.14) より

$$P=\frac{k\pm T\sqrt{k^2-TSk}}{T}$$
$$Q=\frac{k\mp\sqrt{k^2-TSk}}{S} \quad \text{（複号同順）}$$

これを式 (2.12) に代入して整理すると，

$$4k(-ST+SG+TF-GF)=(SG-TS)^2$$

これを適当に変形すると，

$$(ST-k)(FG-k)=\left(\frac{SG+TF}{2}-k\right)^2$$

になる。したがって，

$$(f(s,\ t)g(s,\ t)-k)(f(x,\ y)g(x,\ y)-k)$$
$$=\left\{\frac{f(s,\ t)g(x,\ y)+f(x,\ y)g(s,\ t)}{2}-k\right\}^2$$

が導かれる。 ■

例：双曲線 $xy=1$ へ点 (−2, 4) から引いた接線の方程式は，式 (2.8) より

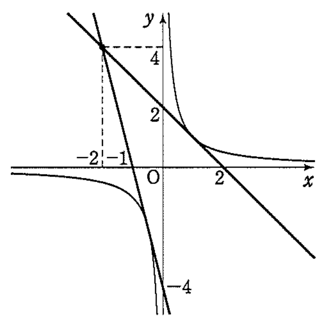
$$(-2\cdot4-1)(xy-1)=\left(\frac{-2y+4x}{2}-1\right)^2$$

これを整理して，

$$(y+x-2)(y+4x+4)=0$$

したがって，求める接線の式は

$$y=-x+2,\ y=-4x-4$$



（図 3 ）

(3) 放物線

> 放物線 $g(x,\ y)^2=kf(x,\ y)$
> へ点 $(s,\ t)$ から引いた接線の方程式は
> $$(g(s,\ t)^2-kf(s,\ t))(g(x,\ y)^2-kf(x,\ y))$$
> $$=\left\{g(s,\ t)g(x,\ y)-k\frac{f(s,\ t)+f(x,\ y)}{2}\right\}^2 (2.15)$$

証明：放物線　$g(x,\ y)^2=kf(x,\ y)$　の接点 $(p,\ q)$ における接線の方程式は

$$2g(p,\ q)g(x,\ y)=k\{f(p,\ q)+f(x,\ y)\} \qquad (2.16)$$

接点 $(p,\ q)$ は，放物線上の点だから，

$$g(p,\ q)^2=kf(p,\ q) \qquad (2.17)$$

を満たす。また，接線 (2.16) は点 $(s,\ t)$ を通るから

$$2g(p,\ q)g(s,\ t)=k\{f(p,\ q)+f(s,\ t)\} \qquad (2.18)$$

ここで，

$$f(p,\ q)=P,\ g(p,\ q)=Q,\ f(s,\ t)=S,$$
$$g(s,\ t)=T,\ f(x,\ y)=F,\ g(x,\ y)=G$$

とおくと，

(2.16)，(2.17)，(2.18) より

$$\begin{cases} 2QG=k(P+F) & (2.19) \\ Q^2=kP & (2.20) \\ 2QT=k(P+T) & (2.21) \end{cases}$$

(2.20)，(2.21) より

$$P=\frac{2T^2-kS\pm 2T\sqrt{T^2-kS}}{k}$$
$$Q=T\pm\sqrt{T^2-kS} \quad \text{（複号同順）}$$

これを (2.19) に代入して整理すると，

$$k(F-S)^2+4(T-G)(FT-SG)=0$$

これを適当に変形すると，

$$(T^2-kS)(G^2-kF)=\left(TG-k\frac{S+F}{2}\right)^2$$

になる。したがって，

$$(g(s,\ t)^2-kf(s,\ t))(g(x,\ y)^2-kf(x,\ y))$$
$$=\left\{g(s,\ t)g(x,\ y)-k\frac{f(s,\ t)+f(x,\ y)}{2}\right\}^2$$

が導かれる。 ■

例：放物線　$y=x^2$　へ点 $(1,\ -3)$ から引いた接線の方程式は，式 (2.15) より

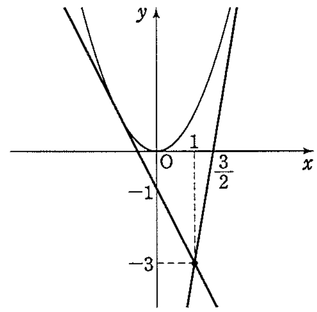
$$(-3-1^2)(y-x^2)=\left(\frac{y-3}{2}-x\right)^2$$

これを整理すると

$$y^2-12x^2-4xy+12x+10y+9=0$$
$$(y+2x+1)(y-6x+9)=0$$

したがって

$$y+2x+1=0,\ y-6x+9=0$$



（図４）

§3. 曲線外の点から引いた接線　(II)

> 一般に，２次曲線
>
> $$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0 \qquad (3.1)$$
>
> へ点 $(s,\ t)$ から引いた接線の方程式は
>
> $$(ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f)$$
> $$\times(as^2+bt^2+cst+ds+et+f)$$
> $$=\left\{asx+bty+c\frac{sy+tx}{2}+d\frac{s+x}{2}+e\frac{y+t}{2}+f\right\}^2 \qquad (3.2)$$
>
> と表すことができる。

証明：式 (3.1) が楕円，双曲線，放物線のいずれかを表す場合には，(1.1) と (2.1)，(1.2) と (2.8)，(1.3) と (2.15) の関係より，明らかに式 (3.2) が接線の方程式になる。 ■

例：$x^2+y^2-2xy+2x=0$ へ点 (2，2) から引いた接線の方程式は，式 (3.2) より

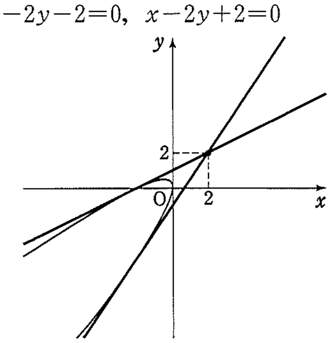
$$(4+4-8+4)(x^2+y^2-2xy+2x)$$
$$=\left(2x+2y-2\frac{2y+2x}{2}+2\frac{2+x}{2}\right)^2$$

これを整理すると

$$3x^2+4y^2-8xy+4x-4=0$$
$$(3x-2y-2)(x-2y+2)=0$$

したがって，求める接線の式は

$$3x-2y-2=0,\ x-2y+2=0$$



（図５）

例：$x^2+y^2+xy+2x=0$ へ点 $(2,\ 2)$ から引いた接線の方程式は，式 (3.2) より

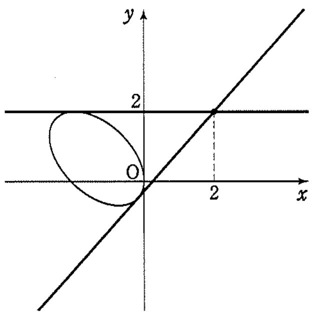
$$(4+4+4+4)(x^2+y^2+xy+2x)$$
$$=\left(2x+2y+\frac{2y+2x}{2}+2\frac{2+x}{2}\right)^2$$

これを整理すると

$$7x^2-8xy+16x-12y-4=0$$
$$(y-2)(7y-8x+2)=0$$

したがって，求める接線の式は

$$y=2,\ 7y-8x+2=0$$



（図６）

例：$x^2+y^2-4xy+2x=0$ へ点 $(0,\ 2)$ から引いた接線の方程式は，式 (3.2) より

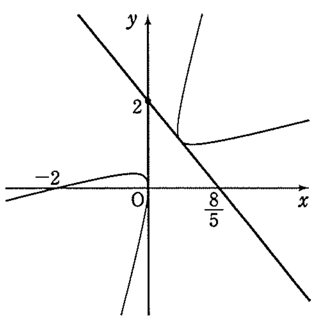
$$4(x^2+y^2-4xy+2x)$$
$$=\left(2y-4\frac{0+2x}{2}+2\frac{0+x}{2}\right)^2$$

これを整理すると

$$5x^2+4xy-8x=0$$
$$x(5x+4y-8)=0$$

したがって，求める接線の式は

$$x=0,\ 5x+4y-8=0$$



（図７）

§4. おわりに

２次曲線の接線について(I)に続いて，曲線外の点を通る接線の方程式の公式を与えた。

$f(x,\ y)$，$g(x,\ y)$ を使って与えられた公式は，平行移動や回転移動，また一次変換された２次曲線の式に対しても接線の式を与えることができる。楕円，双曲線，放物線のそれぞれの式について公式を与えた。

また，３節の式 (3.2) で与えられた式は，２次曲線が楕円，双曲線，放物線のいずれであるかが区別できなくても点 $(s,\ t)$ を通る接線の式を与えることができる。式 (3.2) は難しい式のように一見見えるが，構造は実に単純である。すなわち，式 (3.2) の左辺は２次曲線の式 (3.1) の左辺と，(3.1) の左辺に座標 $(s,\ t)$ を代入した値を掛けたものであり，また右辺は座標 $(s,\ t)$ が接点であるかのようにしてつくった接線の式を２乗したものになっている。

曲線上の点における接線の式を求める問題と，曲線外の点から曲線に引いた接線の式を求めるという問題は，どの教科書でも扱う基本的な問題であるが，その両方について簡単に求めることができる公式を考察した。

一般に式 (3.1) の形の式は２次曲線になるとは限らず，２直線を表す式になったり，１点を表す式になったりする。しかし，ここではそのようなことについての考察はしていない。また，式 (2.1)，(2.8)，(2.15) はその導き方から考えても，任意の点 $(s,\ t)$ の値を代入して接線を与えるものではない。接線が存在するような点 $(s,\ t)$ の座標を代入したとき，それは接線の式を与えるということである。

《参考文献》

〔１〕 片岡宏信「二次曲線の統一的理解」日本数学教育学会誌 (2002) 第 84 巻　第５号　*pp.*29〜34

〔２〕 片岡宏信「双曲線を表す一般形について」数研通信 (1996) No. 26　*pp.*26〜28

〔３〕 片岡宏信「二次曲線の新しい統一的理解」数研通信 (2000) No. 37　*pp.*26〜28

〔４〕 新編数学II，新編数学Ｃ (第一学習社)

〔５〕 チャート式数学Ｃ (数研出版)

〔６〕 共立数学公式 (共立出版株式会社)

（兵庫県立福崎高等学校）