既約ピタゴラス数の存在について

増田　菜美（ますだ　なみ）

§1. 既約ピタゴラス数について

ピタゴラス数とは $a^2+b^2=c^2$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ のことである。そのうち，a，b，c が互いに素であるものを既約ピタゴラス数という。

m，n が互いに素な整数で，m，n の一方を偶数で，もう一方を奇数とすると，

$$(a,\ b,\ c)=(m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2) \tag{1}$$

は既約ピタゴラス数を与えることが知られている。

この既約ピタゴラス数について本校の生徒が，内接円との関係性を見出した。そこから発展して調べていくうちに，様々なことがわかった。おそらくよく知られた事実だと思うが，紹介したいと思う。

§2. 内接円の半径とピタゴラス数の関係

> **命題1**　3辺が整数の直角三角形において，内接円の半径は整数で与えられる。

証明　$\angle C=90^\circ$ の直角三角形 ABC において，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，内接円の半径を r とする。円外の点から円に引いた接線の接点までの距離は等しい。$c=(a-r)+(b-r)$ であるから，$r=\dfrac{1}{2}(a+b-c)$ である。ここで $a^2+b^2=c^2$ より a，b，c の偶奇は，偶偶偶，偶奇奇，奇偶奇，奇奇偶のいずれかだが，そのいずれにしても $(a+b-c)$ は偶数となる。したがって直角三角形の3辺 a，b，c が整数のとき，内接円の半径 r は整数である。■

> **命題2**　整数 r に対し，その r を内接円の半径とするような，3辺が互いに素である整数で与えられる直角三角形が存在する。したがって，既約ピタゴラス数は無限にある。

以降，3辺が互いに素である整数で与えられる直角三角形のことを既約直角三角形と呼ぶことにする。

証明

$$\begin{aligned} a^2+b^2&=c^2 \\ &=(a-r+b-r)^2 \\ &=(a+b-2r)^2 \\ &=(a+b)^2-4r(a+b)+4r^2 \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} 2ab-4r(a+b)+4r^2&=0 \\ ab-2r(a+b)+2r^2&=0 \\ (a-2r)(b-2r)&=2r^2 \end{aligned}$$

このとき，

$$(a-2r,\ b-2r)=(1,\ 2r^2),\ (2,\ r^2),\ (r,\ 2r) \tag{2}$$

$(a,\ b)$ の組み合わせを考えると，どのような r に対しても $(a,\ b)$ の組み合わせは，$(1+2r,\ 2r^2+2r)$，$(2+2r,\ r^2+2r)$，$(3r,\ 4r)$ などの整数解がみつかる。つまり，どのような r に対しても $(a,\ b,\ c)$ がピタゴラス数になるものが見つけられることがわかる。

この中に既約になるものがあるかどうかが問題である。

ここで，1つ目の組み合わせ

$$(a,\ b)=(1+2r,\ 2r^2+2r)=(1+2r,\ 2r(1+r)) \tag{3}$$

について考える。

$1+2r$ と $2r$ は連続する整数なので互いに素。

$1+2r$ と $1+r$ についても $1+2r=(1+r)+r$ であり，r と $r+1$ が互いに素であるから，$1+2r$ は $1+r$ と互いに素である。したがって，この関係から既約ピタゴラス数

$$(a,\ b,\ c)=(1+2r,\ 2r(1+r),\ 1+2r+2r^2) \tag{4}$$

が与えられる。

2つ目の組み合わせ

$$(a,\ b)=(2+2r,\ r^2+2r)=(2(1+r),\ r(r+2)) \tag{5}$$

について考える。連続2整数は互いに素なので，r が奇数のとき，これらは互いに素である。この組み合わせからも既約ピタゴラス数が与えられる。

言うまでもないが，3つ目の組み合わせは可約であり，望むものは出てこない（しかもそれはいつも

$3:4:5$ である)。 ■

証明の中で出てくる(4):$(a,\ b,\ c)=(1+2r,\ 2r^2+2r,\ 1+2r+2r^2)$ と(1)で与えられた既約ピタゴラス数 $(a,\ b,\ c)=(m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2)$ において，$m=1+r$，$n=r$ のときであり，m，n の差が1となる場合に対応していることがわかる。

そして，(5):$(a,\ b,\ c)=(2+2r,\ r^2+2r,\ 2+2r+r^2)$ (r:奇数) は $m=1+r$，$n=1$ のときで，m，n の差が r となる場合に対応している。

以上のことから，内接円の半径と既約ピタゴラス数は密接に関係していることがわかる。

ここで今度は，ある内接円の半径に対して，どのくらいの既約直角三角形があるのかを考えてみたい。

> **命題 3**　整数 $r>1$ が与えられた時，その r を内接円の半径とするような既約直角三角形は，r が偶数のときは，2^{k-1} 個存在し，r が奇数のときは 2^k 個存在する。
> ただし，ここで k は $r=p_1^{r_1}p_2^{r_2}p_3^{r_3}\cdots p_k^{r_k}$ と素因数分解したときの素因子の数である。なお，$r=1$ のときは $3:4:5$ の直角三角形のみである。

証明　$(a-2r)(b-2r)=2r^2$ であり，$2r^2=2p_1^{2r_1}p_2^{2r_2}p_3^{2r_3}\cdots p_k^{2r_k}$ である。これを2つに分け，それぞれに $2r$ を加えたものが a，b である。このとき共通の約数を持たないように分ける方法を数え上げればよい。各 i について a_i が2つずつあるが，これが2つに分かれてしまうと，a，b が共通の約数をもつことになってしまう。

r が偶数，つまり $a_1=2$ であるとき，

$2^{2r_1+1}a_2^{2r_2}a_3^{2r_3}\cdots a_k^{2r_k}$ と考えると，1から k までを2つのグループに分ける場合の数であるから 2^{k-1} 通りの分け方ができる。

r が奇数のときは2と a_i たちの分け方になるので，2^k 通りの分け方ができる。 ■

例えば，内接円の半径が $30=2\times3\times5$ になるような，既約直角三角形を考える。r が偶数であり，$k=3$ であるので $2^{3-1}=4$ 種類ある。具体的には $(61,\ 1860,\ 1861)$，$(68,\ 285,\ 293)$，$(69,\ 260,\ 269)$，$(85,\ 132,\ 157)$ の4通りである。

§3. 単位円上の有理点と既約ピタゴラス数

ところで，単位円上の有理点 $(x,\ y)=\left(\frac{n_1}{m_1},\ \frac{n_2}{m_2}\right)$ は，$x^2+y^2=1$ を満たすので，分母をはらうことで既約ピタゴラス数が得られる。その逆もいえて，既約ピタゴラス数に対して単位円上の有理点が与えられる。つまり，既約ピタゴラス数がどのようなものがどれくらいあるかという問いは，単位円上に有理点がどれくらいあるかということと同じである。

> **命題 4**　ブラーマグプタの二平方恒等式
> $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$
> が成り立つ。

これにより，$(a,\ b)$，$(c,\ d)$ が単位円上の点のとき，$(ac-bd,\ ad+bc)$ という点はまた単位円上の点である。ここで，具体的に計算してみる。

$(a,\ b)=(c,\ d)=\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$ のとき，$(a,\ b)*(c,\ d)$
$=\left(\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\times\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{7}{25},\ \frac{24}{25}\right)$

である。

演算 $*$ を続けると，新しい既約ピタゴラス数が得られる。点 $A=(a,\ b)=\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$ として，$A*A=A^2=\left(-\frac{7}{25},\ \frac{24}{25}\right)$ のように記述すると，A^n を考えることで，既約ピタゴラス数が次々と得られる。例えば，

$A^3=\left(-\frac{117}{125},\ \frac{44}{125}\right)$，$A^4=\left(-\frac{527}{625},\ -\frac{336}{625}\right)$

$3:4:5$ の直角三角形からたくさんの既約直角三角形が導出されることがわかる。

> **命題 5**　上記の記号で A^n はどの n についても，すべて異なる既約ピタゴラス数が得られる。

証明　関係性を良く見ると，これはガウス平面上で考えて，複素数 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ に対して z_1z_2 を考えているのと同じである。

もし，$A^n=(1,\ 0)$ になるような n が存在したとすると，代数学の基本定理により，A は1の n 乗根であることを意味する。A は1の n 乗根ではないので，そのような n はない。つまり，A^n はそれぞれ異なる既約ピタゴラス数となる。 ■

> **命題 6**　任意の自然数 k において，$c=5^k$ を満たす既約ピタゴラス数 $(a,\ b,\ c)$ が存在する。

証明　帰納法で示す。

$k=1$ のとき，$\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$ であり，$3\equiv3(\mathrm{mod}\,5)$，

$4\equiv4 \pmod 5$ である。

$k=r$ のとき，$A^r=\left(\frac{a}{5^r},\ \frac{b}{5^r}\right)$ で，$a\equiv3 \pmod 5$，$b\equiv4 \pmod 5$ とする。このとき，

$$A^{r+1}=\left(\frac{a}{5^r},\ \frac{b}{5^r}\right)*\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)=\left(\frac{3a-4b}{5^{r+1}},\ \frac{4a+3b}{5^{r+1}}\right)$$

で，$3a-4b\equiv3\times3-4\times4\equiv9-16\equiv-7\equiv3$ が成り立ち，$4a+3b\equiv4\times3+3\times4\equiv12+12\equiv24\equiv4$ が成り立つ。したがって，A^r の分子は5で割れないことがわかる。よって，任意の k について，$c=5^k$ を満たす既約ピタゴラス数 $(a,\ b,\ c)$ が存在する。 ■

もっと一般的に，次が言える。

命題7 (1)において，$m^2+n^2=p$ (p：2 以外の素数) となるような p に関して，すべての自然数 k について $c'=p^k$ となるような既約ピタゴラス数 $(a',\ b',\ c')$ が存在する。

証明 $a^2+b^2=p^2$ より，$b^2\equiv-a^2 \pmod p$ である。
$(a,\ b)*(a,\ b)=(a^2-b^2,\ 2ab)\equiv(2a^2,\ 2ab)$
$\equiv2a(a,\ b) \pmod p$ であるから，
$(a,\ b)^k\equiv(2a)^{k-1}(a,\ b) \pmod p$ となる。
ここで，Z_p (p：素数) における乗法群
$Z_p{}^*=\{1,\ \cdots,\ p-1\}$ は，位数が $p-1$ の巡回群となるので，$(a,\ b)^p\equiv(2a)^{p-1}(a,\ b)\equiv(a,\ b)$ である。したがって分子が p の倍数にはならないことがわかる。よって，$c'=p^k$ を満たす既約ピタゴラス数 $(a',\ b',\ c')$ が存在する。 ■

このことから，素数のべき乗シリーズの既約直角三角形が産まれることがわかる。
c が相異なる2つの素数の積となるものからは，$16^2+63^2=65^2$，$33^2+56^2=65^2$ のように，同じ c^2 において2通り以上の a^2+b^2 が考えられるものを見出すことができる。

命題8 単位円上の異なる2つの有理点 $\left(\frac{a}{c},\ \frac{b}{c}\right)$，$\left(\frac{d}{f},\ \frac{e}{f}\right)$ で $|a|\neq|b|$，$|d|\neq|e|$ とする。さらに，c，f が素数で $m_c{}^2+n_c{}^2=c$，$m_f{}^2+n_f{}^2=f$ となるような整数 m_c，n_c，整数 m_f，n_f があるとする。このとき，既約ピタゴラス数 $(a',\ b',\ c')$ で，同じ c' で2通り以上の $a'^2+b'^2$ が考えられるものを見出すことができる。

証明 ブラーマグプタの公式を使い，$\left(\frac{a}{c},\ \frac{b}{c}\right)$ と $\left(\frac{d}{f},\ \frac{e}{f}\right)$ より新たな有理点 $\left(\frac{ad-be}{cf},\ \frac{ae+bd}{cf}\right)$ を得る。また，$\left(\frac{a}{c},\ \frac{b}{c}\right)$ と $\left(\frac{e}{f},\ \frac{d}{f}\right)$ のように2つ目の点を x 座標と y 座標を入れ替えて計算すると，新たな有理点 $\left(\frac{ae-bd}{cf},\ \frac{ad+be}{cf}\right)$ を得る。この2点はともに分母が cf であるため，2種類の表記ができる。この2つが一致してしまうことはない。
なぜなら，一致するとすれば $ad-be=ae-bd$，$ae+bd=ad+be$ であるが，

$$ad-be=ae-bd$$
$$a(d-e)+b(d-e)=0$$
$$(a+b)(d-e)=0$$

また

$$ae+bd=ad-be$$
$$a(e-d)-b(d+e)=0$$
$$(a-b)(d+e)=0$$

である。これは，$|a|\neq|b|$，$|d|\neq|e|$ と矛盾する。よって，2つ以上の表記が可能である。

たとえば，$\left(\frac{20}{29},\ \frac{21}{29}\right)$，$\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$ より $\left(-\frac{24}{145},\ \frac{143}{145}\right)$ が得られ，$\left(\frac{20}{29},\ \frac{21}{29}\right)$，$\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ より $\left(\frac{17}{145},\ \frac{144}{145}\right)$ が得られる。
これより，145 に関して，2通りの表記：$24^2+143^2=145^2$，$17^2+144^2=145^2$ が得られる。 ■

そしてさらに，同様にして計算をすることで，$\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$，$\left(\frac{5}{13},\ \frac{12}{13}\right)$，$\left(\frac{20}{29},\ \frac{21}{29}\right)$ から $1885^2=516^2+1813^2=427^2+1836^2=924^2+1643^2=1003^2+1596^2$ のように4通りの表記ができるものを見つけることができる。

§4. おわりに

既約ピタゴラス数について，内接円の半径と関係があること，さらにその事実から既約ピタゴラス数の見つけ方まで発見したことに驚いた。整数問題は難しいけれど，実力のある生徒にとっては，問題意識がもちやすいため，発想の豊かさが生かせて大変面白い要素があると感じている。今回，面白いテーマを示唆してくれて原朱音さんに感謝したいと思う。

(福岡県　筑紫女学園中学・高等学校)