チェビシェフの多項式と n 倍角の公式

潮田(うしおだ) 康夫(やすお)

§1. はじめに

最近の大学入試問題の中の，三角関数の n 倍角やチェビシェフ多項式を題材にした問題をまとめて調べてみた。その中で，$\sin 5\theta$ を $\sin\theta$ だけを用いて表した多項式と，$\cos 5\theta$ を $\cos\theta$ だけを用いて表した多項式が実は同じ形であることに気づいた。そこで数研通信のバックナンバーに掲載された先生方のチェビシェフ多項式に関する記事を参考にさせていただいて調べる中で，実は $n=4k+1$ $(k\geqq 0)$ の場合には，$\sin n\theta$ を $\sin\theta$ だけを用いて表した多項式と，$\cos n\theta$ を $\cos\theta$ だけを用いて表した多項式が同じ形であることがわかった。例えば，

$$\cos 5\theta=16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta$$

$$\sin 5\theta=16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta$$

である。ここでは，その証明を紹介したい。

§2. チェビシェフ多項式 $T_n(x)$ と第 2 種チェビシェフ多項式 $g_n(x)$

自然数 n に対して

$$\cos n\theta=T_n(\cos\theta),\ \sin n\theta=\sin\theta\cdot g_n(\cos\theta)$$

を満たす n 次の整数係数多項式 $T_n(x)$，$n-1$ 次の整数係数多項式 $g_n(x)$ を考えると，

$x=\cos\theta$ とおいて

$$T_1(x)=x,\qquad g_1(x)=1$$

$$T_2(x)=2x^2-1,\qquad g_2(x)=2x$$

であり，加法定理により

$\cos(n+1)\theta=\cos\theta\cos n\theta-\sin\theta\sin n\theta$ から

$$T_{n+1}(x)=xT_n(x)-\sin^2\theta\cdot g_n(x)$$
$$=xT_n(x)-(1-x^2)g_n(x) \qquad \cdots①$$

$\sin(n+1)\theta=\sin\theta\cos n\theta+\cos\theta\sin n\theta$ から

$$\sin\theta\cdot g_{n+1}(x)=\sin\theta\cdot T_n(x)+x\sin\theta\cdot g_n(x)$$

$$\therefore\ g_{n+1}(x)=T_n(x)+xg_n(x) \qquad \cdots②$$

①より $g_n(x)=\dfrac{1}{x^2-1}\{T_{n+1}(x)-xT_n(x)\}$

②に代入して

$$\frac{1}{x^2-1}\{T_{n+2}(x)-xT_{n+1}(x)\}=T_n(x)+\frac{x}{x^2-1}\{T_{n+1}(x)-xT_n(x)\}$$

$$T_{n+2}(x)-xT_{n+1}(x)=(x^2-1)T_n(x)+xT_{n+1}(x)-x^2T_n(x)$$
$$=xT_{n+1}(x)-T_n(x)$$

$$\therefore\ T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x)$$

同様にして

$g_{n+2}(x)=2x\cdot g_{n+1}(x)-g_n(x)$ を得る。

この漸化式から

$T_1(x)=x$	$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$
$T_2(x)=2x^2-1$	$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$
$T_3(x)=4x^3-3x$	$\vdots$

となり，$\cos n\theta$ はすべて $\cos\theta$ だけの n 次の整数係数多項式として表せる。また，

$g_1(x)=1$	$g_4(x)=8x^3-4x$
$g_2(x)=2x$	$g_5(x)=16x^4-12x^2+1$
$g_3(x)=4x^2-1$	$\vdots$

となり，$\sin n\theta$ はすべて $\cos\theta$ だけの $n-1$ 次の整数係数多項式と $\sin\theta$ の積として表せるが，特に n が奇数のときは，$\sin n\theta$ はすべて $\sin\theta$ だけの n 次の整数係数多項式として表せる。

第 2 種チェビシェフ多項式として，

$$\sin n\theta=\sin\theta\cdot g_n(2\cos\theta)$$

を満たす $n-1$ 次の整数係数多項式 $g_n(x)$ を考える場合もあり，最高次の係数が 1 になるので大学入試問題ではこちらで出題される場合も多いが，この場合は $x=2\cos\theta$ として次の漸化式になる。

$$g_1(x)=1,\ g_2(x)=x,$$

$$g_{n+2}(x)=x\cdot g_{n+1}(x)-g_n(x)$$

さて，ここで n が奇数のときに注目すると

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

$$\cos 5\theta=T_5(\cos\theta)=16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta$$

$$\sin 5\theta=\sin\theta\cdot g_5(\cos\theta)$$

$=\sin\theta\cdot(16\cos^4\theta-12\cos^2\theta+1)$
$=\sin\theta\cdot\{16(1-\sin^2\theta)^2-12(1-\sin^2\theta)+1\}$
$=16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta$

のように実は $n=4k+1$ $(k\geqq 0)$ の場合，$\cos n\theta$ を $\cos\theta$ だけを用いて表した多項式と，$\sin n\theta$ を $\sin\theta$ だけを用いて表した多項式は同じであり，$n=4k+3$ $(k\geqq 0)$ の場合は，多項式の次式が同じで，係数の正負が逆になることがわかった。その証明を次に示したい。

§3. 証　明

チェビシェフ多項式 $T_n(x)$ の漸化式を用いて，$T_{n+4}(x)$ を $T_n(x)$，$T_{n-4}(x)$ で表すことを考えると

$$
\begin{aligned}
T_{n+4}(x)&=2xT_{n+3}(x)-T_{n+2}(x)\\
&=2x\{2xT_{n+2}(x)-T_{n+1}(x)\}-T_{n+2}(x)\\
&=(4x^2-1)T_{n+2}(x)-2xT_{n+1}(x)\\
&=(4x^2-1)T_{n+2}(x)-\{T_{n+2}(x)+T_n(x)\}\\
&=(4x^2-2)T_{n+2}(x)-T_n(x)\\
&=(4x^2-2)\{(4x^2-2)T_n(x)-T_{n-2}(x)\}-T_n(x)\\
&=(16x^4-16x^2+3)T_n(x)-(4x^2-2)T_{n-2}(x)\\
&=(16x^4-16x^2+3)T_n(x)-\{T_n(x)+T_{n-4}(x)\}\\
&=(16x^4-16x^2+2)T_n(x)-T_{n-4}(x) \quad \cdots③
\end{aligned}
$$

となる。

同じ漸化式が，第2種チェビシェフ多項式 $g_n(x)$ にも適用できるので

$$g_{n+4}(x)=(16x^4-16x^2+2)g_n(x)-g_{n-4}(x)$$

となる。ここで，$x=\cos\theta$ であるが，さらに $s=\sin\theta$ とおくと

$$
\begin{aligned}
16x^4-16x^2+2&=16(1-s^2)^2-16(1-s^2)+2\\
&=16s^4-16s^2+2 \text{ であるから}
\end{aligned}
$$

$$g_{n+4}(x)=(16s^4-16s^2+2)g_n(x)-g_{n-4}(x) \quad \cdots④$$

となる。

n が奇数の場合，$g_{n+4}(x)$，$g_n(x)$，$g_{n-4}(x)$ はいずれも $s=\sin\theta$ だけの式で表せるので，もし

$\sin\theta\cdot g_{n-4}(x)=T_{n-4}(\sin\theta)$,
$\sin\theta\cdot g_n(x)=T_n(\sin\theta)$

が成り立てば

$\sin\theta\cdot g_{n+4}(x)=T_{n+4}(\sin\theta)$

が成り立つ。

実際，$\sin\theta\cdot g_1(x)=\sin\theta=T_1(\sin\theta)$,
$\sin\theta\cdot g_5(x)=16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta=T_5(\sin\theta)$

が成り立っているので，$n=4k+1$ $(k\geqq 0)$ の場合，$\cos n\theta$ を $\cos\theta$ だけを用いて表した多項式と，$\sin n\theta$ を $\sin\theta$ だけを用いて表した多項式は同じになる。

では次に，なぜ $n=5$ のとき $\cos 5\theta$ の5倍角の公式と $\sin 5\theta$ の5倍角の公式が，同じ形の多項式として一致するのだろうか。これも上で用いた漸化式の変形のプロセスを使って説明できる。

チェビシェフ多項式 $T_{n+4}(x)$ は，$T_{n+2}(x)$，$T_n(x)$ を用いて

$$T_{n+4}(x)=(4x^2-2)T_{n+2}(x)-T_n(x) \quad \cdots⑤$$

と表せるが，第2種チェビシェフ多項式 $g_{n+4}(x)$ にも同じ漸化式が適用できるので

$$g_{n+4}(x)=(4x^2-2)g_{n+2}(x)-g_n(x)$$

ここで

$4x^2-2=4(1-s^2)-2=-(4s^2-2)$ であるから

$g_{n+4}(x)=-(4s^2-2)g_{n+2}(x)-g_n(x)$ $\cdots⑥$　となる。

したがって，n が奇数で，

$\sin\theta\cdot g_{n+2}(x)=-T_{n+2}(\sin\theta)$,
$\sin\theta\cdot g_n(x)=T_n(\sin\theta)$

が成り立てば

$\sin\theta\cdot g_{n+4}(x)=T_{n+4}(\sin\theta)$

が成り立つ。

実際 $\sin\theta\cdot g_1(x)=\sin\theta=T_1(\sin\theta)$,
$\sin\theta\cdot g_3(x)=3\sin\theta-4\sin^3\theta=-T_3(\sin\theta)$

が成り立つので，$n=5$ の場合（⑤，⑥の式で $n=1$ を代入），$\cos n\theta$ を $\cos\theta$ だけを用いて表した多項式と，$\sin n\theta$ を $\sin\theta$ だけを用いて表した多項式は，同じになる。また

$\sin\theta\cdot g_5(x)=16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta=T_5(\sin\theta)$

が成り立つので，$n=7$ の場合（⑤，⑥の式で $n=3$ を代入），$\cos n\theta$ を $\cos\theta$ だけを用いて表した多項式と，$\sin n\theta$ を $\sin\theta$ だけを用いて表した多項式では，係数の正負が逆になる。

§4. 三角方程式の解とその図形的な意味

上で証明した事実は，三角方程式を解くことを考えた場合，次のように表現できる。

> $-1\leqq p\leqq 1$，$0\leqq\theta<2\pi$ で，$n=4k+1$ $(k\geqq 0)$ のとき
>
> $\sin n\theta=p$ を満たす $\sin\theta$ と，$\cos n\theta=p$ を満たす $\cos\theta$ は，すべて同じ値である。

簡単のために，これを $\sin 5\theta=1$ $(0\leqq\theta<2\pi)$，$\cos 5\theta=1$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ として，それぞれ求めた解

を単位円上に図示してみよう。

$\sin 5\theta=1$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ を解くと，$0\leqq 5\theta<10\pi$ であるから

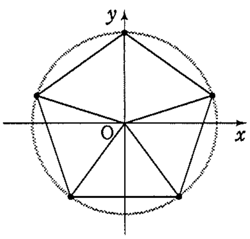
$$5\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi,\ \frac{9}{2}\pi,\ \frac{13}{2}\pi,\ \frac{17}{2}\pi$$

よって　$\theta=\frac{\pi}{10},\ \frac{5}{10}\pi,\ \frac{9}{10}\pi,\ \frac{13}{10}\pi,\ \frac{17}{10}\pi$

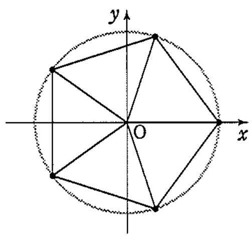
$\cos 5\theta=1$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ を解くと，$0\leqq 5\theta<10\pi$ であるから

$5\theta=0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ 8\pi$

よって　$\theta=0,\ \frac{2}{5}\pi,\ \frac{4}{5}\pi,\ \frac{6}{5}\pi,\ \frac{8}{5}\pi$



$\sin 5\theta=1$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の解



$\cos 5\theta=1$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の解

$\sin 5\theta=1$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の1個目の解は $\theta=\frac{\pi}{10}$ であるが，2個目の解 $\theta=\frac{5}{10}\pi$ が $\sin\theta=1$ を満たし，$\cos 5\theta=1$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の1個目の解である $\theta=0$ が $\cos\theta=1$ を満たすのと対応する。他の4個の解はそれぞれ等間隔に現れるので，この場合すべて一致する。

このように考えると，「$\sin n\theta=p$ を満たす $\sin\theta$ と，$\cos n\theta=p$ を満たす $\cos\theta$ がすべて同じ値である」ためには，「$\sin n\theta=1$ を満たす $\sin\theta$ と，$\cos n\theta=1$ を満たす $\cos\theta$ がすべて同じ値である」ことは必要条件であり，$\cos n\theta=1$ が必ず $\theta=0$（つまり $\cos\theta=1$）を解にもつことを考えると，

$\sin n\theta=1$ は $n\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ が解であるから，

$\theta=\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\frac{\pi}{2}$（つまり $\sin\theta=1$）を満たす整数 n と k が存在しなければならない。このことから

$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+2k\right)=\frac{1}{2}$ となり，$n=4k+1$ が得られる。

これが，もし $\sin n\theta$ を $\sin\theta$ だけを用いて表した多項式と，$\cos n\theta$ を $\cos\theta$ だけを用いて表した多項式が同じ形になるとすれば，$n=4k+1$ でなければならない理由である。同様に，もし $\sin n\theta$ を $\sin\theta$ だけを用いて表した多項式と，$\cos n\theta$ を $\cos\theta$ だけを用いて表した多項式が，正負が反対の係数をもつ多項式になるとすれば，$n=4k+3$ でなければならない理由も理解される。

§5. 関連する大学入試問題

三角関数の n 倍角やチェビシェフ多項式を題材にした最近の大学入試問題をいくつか挙げておく。

(1)　5倍角・7倍角に関する問題

2008年度　東京慈恵会医大　医学部

> $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=a,$
>
> $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=b$
>
> とする。a と b の値を求めたい。
>
> (1)　角 θ（ラジアン）が $\cos 3\theta=\cos 4\theta$ …… ① を満たすとき，解の1つが $\cos\theta$ であるような4次方程式を求めよ。
>
> (2)　$\theta=\frac{2\pi}{7}$ のとき，$\cos\theta$ が解の1つであるような3次方程式を求めよ。
>
> (3)　(2)の結果を用いて，a および b の値を求めよ。

2007年度　横浜市立大　医学部

> $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ の値を求めるために，$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=t$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，$2\pi=360°$ である。
>
> (1)　$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ を t で表せ。
>
> (2)　すべての実数 θ に対して $\cos(5\theta)=P(\cos\theta)$ となる5次の多項式 $P(x)$ を一つ求めよ。
>
> (3)　t の値を求めよ。

2006年度　横浜国立大・後期　経済学部

> $\theta=\frac{360°}{7}$ とするとき，次の問いに答えよ。
>
> (1)　$\cos 3\theta=\cos 4\theta$ であることを示せ。
>
> (2)　$\cos\theta,\ \cos 2\theta,\ \cos 3\theta$ が解となるような，係数がすべて整数である x の3次方程式を求めよ。

(3) $(1+4\cos^2\theta)(1+4\cos^2 2\theta)(1+4\cos^2 3\theta)$ を求めよ。

2007 年度　慶應義塾大　理工学部

(1) $\cos 3\theta = f(\cos\theta)$ を満たす 3 次式 $f(x)$ と，$\cos 4\theta = g(\cos\theta)$ を満たす 4 次式 $g(x)$ を求めなさい。また，多項式 $h(x)$ で $(x-1)h(x) = g(x)-f(x)$ を満たすものを求めなさい。

(2) $h(x)$ を(1)で求めた多項式とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とするとき，$h(\cos\theta)=0$ であるためには，$\theta=\dfrac{2\pi}{7}$ または $\dfrac{4\pi}{7}$ または $\dfrac{6\pi}{7}$ であることが必要十分条件であることを証明しなさい。

(3) $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}$ の値を求めなさい。値だけでなく，なぜそうなるのかも書くこと。

(2) チェビシェフ多項式に関する問題

2008 年度　富山大　理・工学部

$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して，関数 $P_n(t)$，$Q_n(t)$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ を次のように定義する。

$P_1(t)=t$，$Q_1(t)=1$

$P_n(t)=tP_{n-1}(t)-(1-t^2)Q_{n-1}(t)$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

$Q_n(t)=P_{n-1}(t)+tQ_{n-1}(t)$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

次の問いに答えよ。

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して

$\cos nx = P_n(\cos x)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$

$\sin nx = \sin x Q_n(\cos x)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$

が成り立つことを示せ。

(2) $P_n(1)$，$Q_n(1)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を求めよ。

(3) $P_6(t)=1$ となる t をすべて求めよ。

2008 年度　慶應義塾大　医学部

x の多項式 $f_n(x)$ $(n=0,\ 1,\ \cdots\cdots)$ を

$f_0(x)=1$，$f_1(x)=x$

$f_{n+1}(x)=2xf_n(x)-f_{n-1}(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

により順に定める。

(1) $f_5(x)$ を具体的に求めると $f_5(x)=$ $\boxed{}$ であり，方程式 $f_5(x)=0$ を解くと $x=$ $\boxed{}$ である。

(2) $n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して $f_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ であることを示しなさい。

(3) (1)と(2)を用いて $\cos\dfrac{\pi}{10}$ の値を求めると $\boxed{}$ である。

(4) n を 3 以上の奇数とする。関数 $y=f_n(x)$ $(-1<x<1)$ は極大値 $\boxed{}$ をとる。この極大値をとる x の値すべてを n を用いて表すと $x=$ $\boxed{}$ である。

2004 年度　名古屋大　理・工・農・医・文化情報学部

多項式の列 $f_n(x)$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ が，$f_0(x)=2$，$f_1(x)=x$，$f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)$，$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots$ を満たすとする。

(1) $f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ であることを示せ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，方程式 $f_n(x)=0$ の $|x| \leqq 2$ における最大の実数解を x_n とおく。このとき，$\displaystyle\int_{x_n}^{2} f_n(x)\,dx$ の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 \int_{x_n}^{2} f_n(x)\,dx$ の値を求めよ。

2004 年度　東京医科歯科大　医・歯学部

次の条件 (A)，(B) を満たす関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を考える。

(A) $f_n(x)$ は x の n 次式で表される。

(B) 任意の実数 x に対して次式が成立する。

$f_n(2\cos\theta)\sin\theta=\sin(n+1)\theta$

このとき以下の各問に答えよ。

(1) $f_1(x)$，$f_2(x)$ を求めよ。

(2) 次の極限値を求めよ。ただし k は正の定数とする。 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}$

(3) $f_n(2)$ を求めよ。

(4) 整式 $f_n(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの余りが $ax-25$ のとき，次数 n および定数 a を求めよ。

《参考文献》

〔1〕 宮川幸隆「入試の良問とフィボナッチ数列・リュカ数列」数研通信　数学 No.64，$p.6$～$p.9$

〔2〕 柳田五夫「チェビシェフの多項式について」数研通信　数学 No.17，$p.6$～$p.11$

(栃木県立宇都宮東高等学校)