チェビシェフ多項式の係数について

柳田（やなぎた） 五夫（いつお）

§1. はじめに

数研通信 数学 No.64 で宮川先生がチェビシェフ多項式 $T_n(x)$ に対して，$f_n(x)=2T_n\left(\dfrac{x}{2}\right)$ の係数の絶対値の和は，リュカ数列をなし，第 2 種チェビシェフ多項式 $g_n(x)$ に対して，$u_n(x)=g_{n+1}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ の係数の絶対値の和は，フィボナッチ数列をなすことを多項式数列を用いて見事に証明されています。(参考文献 [1] 参照)

ここでは，具体的にチェビシェフ多項式の係数を求めてみたい。(参考文献 [3] 参照)

§2. $T_n(x)$ の係数

まず $T_n(x)$ の満たす微分方程式を求める。

$x=\cos\theta$ とおくと

$$T_n(x)=\cos n\theta \qquad \cdots①$$

両辺を x で微分すると

$$T_n'(x)=-n\sin n\theta\cdot\frac{d\theta}{dx}=n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \qquad \cdots②$$

$$\begin{aligned}T_n''(x)&=n\frac{n\cos n\theta\cdot\sin\theta-\sin n\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}\cdot\left(-\frac{1}{\sin\theta}\right)\\&=-n\cdot\frac{1}{1-\cos^2\theta}\left(n\cos n\theta-\cos\theta\cdot\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)\\&=-n\cdot\frac{1}{1-x^2}\left(nT_n(x)-x\cdot\frac{T_n'(x)}{n}\right)\end{aligned}$$

したがって

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0 \qquad \cdots③$$

$T_n(x)$ は n 次の多項式で，x^n の係数は 2^{n-1} である (参考文献 [2] 参照) から

$$T_n(x)=t_0+t_1x+\cdots+t_nx^n \qquad \cdots④$$

$(t_n=2^{n-1})$ とおくと，③から

$$(1-x^2)\sum_{k=0}^{n}k(k-1)t_kx^{k-2}-x\sum_{k=0}^{n}kt_kx^{k-1}+n^2\sum_{k=0}^{n}t_kx^k=0$$

変形すると

$$\sum_{k=0}^{n}k(k-1)t_kx^{k-2}-\sum_{k=0}^{n}k(k-1)t_kx^k-\sum_{k=0}^{n}kt_kx^k+n^2\sum_{k=0}^{n}t_kx^k=0$$

$$\sum_{k=0}^{n}k(k-1)t_kx^{k-2}+\sum_{k=0}^{n}(n^2-k^2)t_kx^k=0$$

ここで

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k(k-1)t_kx^{k-2}&=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)t_kx^{k-2}\\&=\sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)t_{k+2}x^k\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(n^2-k^2)t_kx^k=\sum_{k=0}^{n-2}(n^2-k^2)t_kx^k+\{n^2-(n-1)^2\}t_{n-1}x^{n-1}$$

を用いると

$$\sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)t_{k+2}x^k+\sum_{k=0}^{n-2}(n^2-k^2)t_kx^k+\{n^2-(n-1)^2\}t_{n-1}x^{n-1}=0$$

$$\sum_{k=0}^{n-2}\{(k+2)(k+1)t_{k+2}+(n^2-k^2)t_k\}x^k+\{n^2-(n-1)^2\}t_{n-1}x^{n-1}=0$$

これから

$$t_{n-1}=0 \qquad \cdots⑤$$

$$(n^2-k^2)t_k+(k+2)(k+1)t_{k+2}=0 \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-2) \qquad \cdots⑥$$

⑤，⑥から

$$t_{n-(2k+1)}=0\ \left(k=0,\ 1,\ \cdots,\ \left[\frac{n-1}{2}\right]\right) \qquad \cdots⑦$$

⑥で $k=n-2$ とおき，$t_n=2^{n-1}$ を用いると

$$\begin{aligned}t_{n-2}&=-\frac{n(n-1)}{n^2-(n-2)^2}t_n=-\frac{n(n-1)}{4(n-1)}\cdot2^{n-1}\\&=-\frac{n(n-1)}{n-1}\cdot2^{n-3}\end{aligned}$$

⑥で $k=n-4$ とおくと

$$\begin{aligned}t_{n-4}&=-\frac{(n-2)(n-3)}{n^2-(n-4)^2}t_{n-2}\\&=-\frac{(n-2)(n-3)}{2(n-2)\cdot4}\cdot\left(-2^{n-3}\cdot\frac{n(n-1)}{n-1}\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!(n-1)(n-2)}\cdot 2^{n-5}$$

を得る。

$$t_{n-2m}=(-1)^m$$
$$\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-2m+1)}{m!(n-1)(n-2)\cdots(n-m)}\cdot 2^{n-2m-1}$$
$$\cdots ⑧$$

が成り立つと仮定する。

⑥で $k=n-2(m+1)$ とおくと

$$t_{n-2(m+1)}=-\frac{(n-2m)(n-2m-1)}{n^2-(n-2m-2)^2}t_{n-2m}$$
$$=-\frac{(n-2m)(n-2m-1)}{n^2-(n-2m-2)^2}$$
$$\times(-1)^m\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-2m+1)}{m!(n-1)(n-2)\cdots(n-m)}\cdot 2^{n-2m-1}$$
$$=-\frac{(n-2m)(n-2m-1)}{4(m+1)(n-m-1)}$$
$$\times(-1)^m\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-2m+1)}{m!(n-1)(n-2)\cdots(n-m)}\cdot 2^{n-2m-1}$$
$$=(-1)^{m+1}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-2m-1)}{(m+1)!(n-1)(n-2)\cdots(n-m-1)}$$
$$\times 2^{n-2(m+1)-1}$$

となり，帰納的に⑧が成り立つことが示せる。

⑧を変形すると

$$t_{n-2m}$$
$$=(-1)^m\cdot\frac{n}{n-m}\cdot 2^{n-2m-1}$$
$$\times\frac{(n-m)(n-m-1)\cdots(n-2m+1)}{m!}$$
$$=(-1)^m\cdot\frac{n}{n-m}\cdot 2^{n-2m-1}\cdot{}_{n-m}\mathrm{C}_m$$

よって

$$t_{n-2m}=(-1)^m\cdot\frac{n}{n-m}\cdot 2^{n-2m-1}\cdot{}_{n-m}\mathrm{C}_m$$
$$\left(m=0,\ 1,\ \cdots,\ \left[\frac{n}{2}\right]\right)\qquad\cdots ⑨$$

以上で $T_n(x)$ の係数がすべて求まったことになる。

⑦，⑨から $T_n(x)$ は次のように書くことができる。

$$\boldsymbol{T_n(x)=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} t_{n-2m}x^{n-2m}}$$
$$\boldsymbol{=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\cdot\frac{n}{n-m}\cdot 2^{n-2m-1}\cdot{}_{n-m}\mathrm{C}_m x^{n-2m}}$$
$$(n\geqq 1)\quad\cdots ⑩$$

※⑨は $t_{n-2}=-n2^{n-3}$ がでた後で⑥から次のように求めることができる。

$$(n-k)(n+k)t_k=-(k+2)(k+1)t_{k+2}$$

両辺に $k!$ を掛けると

$$(n-k)(n+k)k!\,t_k=-(k+2)!\,t_{k+2}$$

ここで k のところに $n-2m$ を代入すると

$$4m(n-m)(n-2m)!\,t_{n-2m}$$
$$=-(n-2m+2)!\,t_{n-2m+2}$$

両辺に $-(-4)^{m-1}(m-1)!$ を掛けると

$$(-4)^m m!(n-m)(n-2m)!\,t_{n-2m}$$
$$=(-4)^{m-1}(m-1)!\{n-2(m-1)\}!\,t_{n-2(m-1)}$$

両辺を $(n-m)!$ で割ると

$$\frac{(-4)^m m!(n-2m)!}{(n-m-1)!}t_{n-2m}$$
$$=\frac{(-4)^{m-1}(m-1)!\{n-2(m-1)\}!}{(n-m)!}t_{n-2(m-1)}$$

($=m$ によらず一定)

$$=\frac{(-4)^1 1!(n-2)!}{(n-1-1)!}t_{n-2}=(-4)(-n2^{n-3})=n2^{n-1}$$

よって

$$t_{n-2m}=(-1)^m\cdot\frac{n(n-m-1)!}{m!(n-2m)!}\cdot 2^{n-2m-1}$$
$$=(-1)^m\cdot\frac{n(n-m)!}{(n-m)m!(n-2m)!}\cdot 2^{n-2m-1}$$
$$=(-1)^m\cdot\frac{n}{n-m}\cdot 2^{n-2m-1}\cdot{}_{n-m}\mathrm{C}_m$$

②から $g_n(x)=\frac{T_n'(x)}{n}$ なので，⑩を用いると

$$\boldsymbol{g_n(x)=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^m\cdot\frac{n-2m}{n-m}\cdot{}_{n-m}\mathrm{C}_m(2x)^{n-2m-1}}$$
$$(n\geqq 1)\quad\cdots ⑪$$

を得る。

§3. $f_n(x)=2T_n\left(\frac{x}{2}\right)$ の係数について

§2の結果⑩を利用すると，参考文献[1]にある $f_n(x)=2T_n\left(\frac{x}{2}\right)$ の係数の絶対値の和は，リュカ数列をなすことが証明できる。

⑩を利用すると

$$f_n(x)=2T_n\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\cdot\frac{n}{n-m}\cdot{}_{n-m}\mathrm{C}_m x^{n-2m}\qquad\cdots ⑫$$

したがって $f_n(x)$ の係数の絶対値の和は

$n\geqq 1$ のとき

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n}{n-m}\cdot{}_{n-m}C_m$$ (これを L_n とおく)

($n=0$ のときは $f_0(x)=2$ から $L_0=2$ となる。また $L_1=1$)

n が奇数のとき

$$L_n+L_{n+1}=\sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}}\frac{n}{n-m}\cdot{}_{n-m}C_m+\sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}+1}\frac{n+1}{n+1-m}\cdot{}_{n+1-m}C_m$$

$$\sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}}\frac{n}{n-m}\cdot{}_{n-m}C_m=\sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}+1}\frac{n}{n-(m-1)}\cdot{}_{n-(m-1)}C_{m-1}=\sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}+1}\frac{n}{n+1-m}\cdot{}_{n+1-m}C_{m-1}$$

$$\sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}+1}\frac{n+1}{n+1-m}\cdot{}_{n+1-m}C_m=1+\sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}+1}\frac{n+1}{n+1-m}\cdot{}_{n+1-m}C_m$$

を使うと

$$L_n+L_{n+1}=1+\sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}+1}\frac{n}{n+1-m}\cdot{}_{n+1-m}C_{m-1}+\sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}+1}\frac{n+1}{n+1-m}\cdot{}_{n+1-m}C_m$$

ここで

$$\frac{n}{n+1-m}\cdot{}_{n+1-m}C_{m-1}+\frac{n+1}{n+1-m}\cdot{}_{n+1-m}C_m$$
$$=\frac{1}{n+1-m}\left\{n\frac{(n+1-m)!}{(n+2-2m)!(m-1)!}+(n+1)\cdot\frac{(n+1-m)!}{(n+1-2m)!m!}\right\}$$
$$=\frac{(n+1-m)!}{(n+1-m)(n+2-2m)!m!}\times\{nm+(n+1)(n+2-2m)\}$$
$$=\frac{(n+1-m)!}{(n+1-m)(n+2-2m)!m!}(n+2)(n+1-m)$$
$$=\frac{n+2}{n+2-m}\cdot\frac{(n+2-m)!}{(n+2-2m)!m!}$$
$$=\frac{n+2}{n+2-m}\cdot{}_{n+2-m}C_m$$

したがって

$$L_n+L_{n+1}=1+\sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}+1}\frac{n+2}{n+2-m}\cdot{}_{n+2-m}C_m=\sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}+1}\frac{n+2}{n+2-m}\cdot{}_{n+2-m}C_m=L_{n+2}$$

n が偶数のとき(省略) (§4の証明参照)

[注1] L_n+L_{n+1} の計算で示していることは具体的には次のことを行っている。

	$f_n(x)$ の係数の絶対値の和	
$n=9$	$1+9+27+30+9$	$=76$
$n=10$	$1+10+35+50+25+2$	$=123$
$n=11$	$1+11+44+77+55+11$	$=199$

[注2] $L_n=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n}{n-m}\cdot{}_{n-m}C_m$ は⑫から

$L_n=i^{-n}f_n(i)=i^{-n}\cdot 2T_n\left(\frac{i}{2}\right)$ となる。次に $\cos(n+2)\theta+\cos n\theta=2\cos\theta\cos(n+1)\theta$ から得られる $T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x)$ を変形した式 $2T_{n+2}\left(\frac{x}{2}\right)=x\cdot 2T_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)-2T_n\left(\frac{x}{2}\right)$ の両辺に i^{-n-2} を掛けると

$$i^{-n-2}\cdot 2T_{n+2}\left(\frac{x}{2}\right)=i^{-n-1}\cdot i^{-1}x\cdot 2T_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)+i^{-n}\cdot 2T_n\left(\frac{x}{2}\right)$$

$x=i$ とおくと

$$i^{-n-2}\cdot 2T_{n+2}\left(\frac{i}{2}\right)=i^{-n-1}\cdot 2T_{n+1}\left(\frac{i}{2}\right)+i^{-n}\cdot 2T_n\left(\frac{i}{2}\right)$$

すなわち

$L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$ が成り立つ。

また，$T_0(x)=1$，$T_1(x)=x$ より，

$$L_0=2T_0\left(\frac{i}{2}\right)=2,\quad L_1=i^{-1}\cdot 2T_1\left(\frac{i}{2}\right)=i^{-1}\cdot i=1$$

となる。

よって $\{L_n\}$ はリュカ数列をなすことがわかった。

§4. $u_n(x)=g_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)$ について

参考文献[1]にある $u_n(x)=g_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)$ の係数の絶対値の和は，フィボナッチ数列をなすことも証明できる。

⑪から

$$u_n(x)=g_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\cdot\frac{n+1-2m}{n+1-m}\times{}_{n+1-m}C_m x^{n-2m}\quad\cdots⑬$$

したがって $u_n(x)$ の係数の絶対値の和は

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n+1-2m}{n+1-m}\cdot{}_{n+1-m}C_m$$ (これを U_n とおく)

($U_0=1$，$U_1=1$)

nが偶数のとき

$$U_n+U_{n+1}$$
$$=\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}}\frac{n+1-2m}{n+1-m}\cdot{}_{n+1-m}C_m+\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}}\frac{n+2-2m}{n+2-m}\cdot{}_{n+2-m}C_m$$

$$\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}}\frac{n+1-2m}{n+1-m}\cdot{}_{n+1-m}C_m$$
$$=\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{n+1-2m}{n+1-m}\cdot{}_{n+1-m}C_m+1$$
$$=\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}}\frac{n+3-2m}{n+2-m}\cdot{}_{n+2-m}C_{m-1}+1$$

$$\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}}\frac{n+2-2m}{n+2-m}\cdot{}_{n+2-m}C_m$$
$$=1+\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}}\frac{n+2-2m}{n+2-m}\cdot{}_{n+2-m}C_m$$

を使うと

$$U_n+U_{n+1}=\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}}\frac{n+3-2m}{n+2-m}\cdot{}_{n+2-m}C_{m-1}+1+1+\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}}\frac{n+2-2m}{n+2-m}\cdot{}_{n+2-m}C_m$$

ここで

$$\frac{n+3-2m}{n+2-m}\cdot{}_{n+2-m}C_{m-1}+\frac{n+2-2m}{n+2-m}\cdot{}_{n+2-m}C_m$$
$$=\frac{1}{n+2-m}\left\{(n+3-2m)\frac{(n+2-m)!}{(n+3-2m)!\,(m-1)!}+(n+2-2m)\frac{(n+2-m)!}{(n+2-2m)!\,m!}\right\}$$
$$=\frac{(n+2-m)!}{(n+2-m)(n+3-2m)!\,m!}\{(n+3-2m)m+(n+2-2m)(n+3-2m)\}$$
$$=\frac{(n+2-m)!(n+3-2m)(n+2-m)}{(n+2-m)(n+3-2m)!\,m!}$$
$$=\frac{(n+3-2m)(n+3-m)!}{(n+3-m)(n+3-2m)!\,m!}$$
$$=\frac{n+3-2m}{n+3-m}\cdot{}_{n+3-m}C_m$$

したがって

$$U_n+U_{n+1}=1+\sum_{m=1}^{\frac{n}{2}}\frac{n+3-2m}{n+3-m}{}_{n+3-m}C_m+1$$
$$=\sum_{m=0}^{\frac{n+2}{2}}\frac{n+3-2m}{n+3-m}{}_{n+3-m}C_m$$
$$=U_{n+2}$$

nが奇数のとき（省略）。

［注３］ $U_n=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n+1-2m}{n+1-m}\cdot{}_{n+1-m}C_m$ は⑬から

$U_n=i^{-n}u_n(i)=i^{-n}\cdot g_{n+1}\left(\frac{i}{2}\right)$ となる。次に

$\sin(n+2)\theta+\sin n\theta=2\cos\theta\sin(n+1)\theta$ から得られる $g_{n+2}(x)=2xg_{n+1}(x)-g_n(x)$ を変形した式

$g_{n+2}\left(\frac{x}{2}\right)=xg_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)-g_n\left(\frac{x}{2}\right)$ の両辺に i^{-n-2} を掛けると

$$i^{-n-2}\cdot g_{n+2}\left(\frac{x}{2}\right)=i^{-n-1}\cdot i^{-1}x\cdot g_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)+i^{-n}\cdot g_n\left(\frac{x}{2}\right)$$

$x=i$ とおくと

$$i^{-n-2}\cdot g_{n+2}\left(\frac{i}{2}\right)=i^{-n-1}\cdot g_{n+1}\left(\frac{i}{2}\right)+i^{-n}\cdot g_n\left(\frac{i}{2}\right)$$
$$i^{-n-1}\cdot g_{n+2}\left(\frac{i}{2}\right)=i^{-n}\cdot g_{n+1}\left(\frac{i}{2}\right)+i^{-n+1}\cdot g_n\left(\frac{i}{2}\right)$$

すなわち　$U_{n+2}=U_{n+1}+U_n$ が成り立つ。また，$g_1(x)=1$，$g_2(x)=2x$ より，

$$U_0=g_1\left(\frac{i}{2}\right)=1,\quad U_1=i^{-1}\cdot g_2\left(\frac{i}{2}\right)=i^{-1}\cdot i=1$$

となる。よって $\{U_n\}$ はフィボナッチ数列をなすことがわかった。

§5. おわりに

参考文献[1]にある，「pを素数とし，$2T_p(x)$を$2x$の整数係数多項式と見たとき，最高次の項以外の項の係数は全てpの倍数となる」ことが記述されていますが，これも⑩を用いて証明できる。

⑩から

$$2T_p(x)=\sum_{m=0}^{\left[\frac{p}{2}\right]}(-1)^m\cdot\frac{p}{p-m}{}_{p-m}C_m(2x)^{p-2m}$$

$1<m\leqq\left[\frac{p}{2}\right]$ のとき，p と $p-m$ は互いに素であるから，$\frac{p}{p-m}{}_{p-m}C_m$ が整数となるためには，${}_{p-m}C_m$ が $p-m$ の倍数でなければならず，このとき，

$(-1)^m\cdot\frac{p}{p-m}\cdot{}_{p-m}C_m=p(-1)^m\cdot\frac{{}_{p-m}C_m}{p-m}$ はpの倍数である。

《参考文献》

〔１〕 宮川幸隆「入試の良問とフィボナッチ数列・リュカ数列」数研通信　数学 No.64 *pp.*6—9

〔２〕 柳田五夫「チェビシェフの多項式について」数研通信　数学 No.17 *pp.*6—11

〔３〕 Chebyshev polynomials, Wikipedia (the free encyclopedia)

（栃木県立佐野高等学校）