チェビシェフの多項式と入試問題

深谷(ふかや) 茂樹(しげき)

§1. チェビシェフの多項式について

$\cos 1\theta=\cos\theta$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

ですが，$\cos n\theta$ を加法定理で展開した式において，$\cos\theta=x$ として得られる多項式をチェビシェフの多項式といい，通常 $T_n(x)$ で表します。

つまり，$\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$ で，具体的には，

$T_1(x)=x$

$T_2(x)=2x^2-1$

$T_3(x)=4x^3-3x$

⋮

となります。

また，$\sin n\theta$ についても

$\sin n\theta=S_n(\cos\theta)\sin\theta$

となる $S_n(x)$ があります。具体的には，

$S_1(x)=1$

$S_2(x)=2x$

$S_3(x)=4x^2-1$

⋮

となります。

さらに，この $T_n(x)$ と $S_n(x)$ はともに漸化式

$$a_{n+2}-2xa_{n+1}+a_n=0$$

を満たすことが知られています。ここでは，この漸化式に注目していきます。

§2. 漸化式 $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ について

2009年の神戸大学の入試に次の問題が出題されました。

【問題】 t を実数として，数列 a_1，a_2，… を

$a_1=1$，$a_2=2t$，$a_{n+1}=2ta_n-a_{n-1}$ $(n\geqq 2)$

で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $t\geqq 1$ ならば，$0<a_1<a_2<a_3<\cdots$ となることを示せ。

(2) $t\leqq -1$ ならば，$0<|a_1|<|a_2|<|a_3|<\cdots$ となることを示せ。

(3) $-1<t<1$ ならば，$t=\cos\theta$ となる θ を用いて，$a_n=\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ $(n\geqq 1)$ となることを示せ。

この(3)はチェビシェフの多項式 $S_n(x)$ の性質そのものであることがわかります。この証明は，数学的帰納法でできますが，ここでは，もう少し一般的なことについて述べます。

初期値を矛盾なく決めれば，次の2つの漸化式で決まる数列 $\{a_n\}$ は一致します(参考文献1参照)。

[A] $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

[B] $\begin{cases} a_{n+1}=p_{11}a_n+p_{12}b_n \\ b_{n+1}=p_{21}a_n+p_{22}b_n \end{cases}$

ただし，係数行列 $P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ に対して

$p_{11}+p_{22}=\alpha+\beta$，$p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21}=\alpha\beta$

となります。なお，数列 $\{b_n\}$ も漸化式

$b_{n+2}-(\alpha+\beta)b_{n+1}+\alpha\beta b_n=0$

を満たすことが確認できます。

ここで，α，β がともに虚数で共役な複素数であるときを考えると，

$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\beta=r(\cos\theta-i\sin\theta)$

と表されるから

$\alpha+\beta=2r\cos\theta$，$\alpha\beta=r^2$

です。これを漸化式[B]の形で表すと，

$\begin{cases} a_{n+1}=r(\cos\theta\cdot a_n-\sin\theta\cdot b_n) \\ b_{n+1}=r(\sin\theta\cdot a_n+\cos\theta\cdot b_n) \end{cases}$

となります。

これにより，一般項は

$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=r^{n-1}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

ですが，行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は回転を表す行列ですから，

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = r^{n-1} \begin{pmatrix} \cos(n-1)\theta & -\sin(n-1)\theta \\ \sin(n-1)\theta & \cos(n-1)\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ①$$

となります。

§3. $\alpha\beta=1$ の場合について

この漸化式で，$\alpha\beta=1$ つまり $r=1$ のときを考えてみましょう。このとき，漸化式 [A], [B] はそれぞれ

[A′] $a_{n+2}-2\cos\theta\cdot a_{n+1}+a_n=0$

[B′] $\begin{cases} a_{n+1}=\cos\theta\cdot a_n-\sin\theta\cdot b_n \\ b_{n+1}=\sin\theta\cdot a_n+\cos\theta\cdot b_n \end{cases}$

となり，①は

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\theta & -\sin(n-1)\theta \\ \sin(n-1)\theta & \cos(n-1)\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ②$$

となります。

ここで，初期値を $a_1=\cos\theta$，$a_2=\cos 2\theta$ とおくと，[B′] にあてはめて

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin\theta\cdot b_1$

より

$$b_1=\frac{\cos^2\theta-\cos 2\theta}{\sin\theta}=\sin\theta$$

であれば漸化式 [A′], [B′] による数列 $\{a_n\}$ は一致します。

このとき，漸化式 [A′] の一般項は②より

$$\begin{aligned} a_n &= \cos(n-1)\theta\cos\theta-\sin(n-1)\theta\sin\theta \\ &= \cos n\theta \end{aligned}$$

となります。

ちなみに，数列 $\{b_n\}$ も漸化式

$b_{n+2}-2\cos\theta\cdot b_{n+1}+b_n=0$

を満たし，初期値はやはり [B′] にあてはめて

$b_2=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$

とおけばよいから，

$$\begin{aligned} b_n &= \sin(n-1)\theta\cos\theta+\cos(n-1)\theta\sin\theta \\ &= \sin n\theta \end{aligned}$$

となります。

つまり，$\cos n\theta$, $\sin n\theta$ は漸化式 [A′] を満たすことがわかります。

さらに，これらのことから，$m\theta=2\pi$ となる整数 m が存在するならば，漸化式 [A′] による数列 $\{a_n\}$ は周期性をもつことがわかります。

> **【例】** $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}-a_{n+1}+a_n=0$
>
> この漸化式では，
>
> $\alpha=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$，$\beta=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$
>
> です。実際，この数列 $\{a_n\}$ は
>
> 1, 2, 1, −1, −2, −1, 1, 2, ……
>
> となります。

また，数列 $\{a_n\}$ が漸化式 [A′] を満たすとき，定数 k に対して，

$ka_{n+2}-2\cos\theta\cdot ka_{n+1}+ka_n=0$

も成り立ちますから，数列 $\{ka_n\}$ も漸化式 [A′] を満たします。

ここで，$a_n=\sin n\theta$ が漸化式 [A′] を満たすことを使えば $a_n=\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ も漸化式 [A′] を満たします。

つまり，初期値を

$$a_1=\frac{\sin\theta}{\sin\theta}=1,\quad a_2=\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$$

とおけば，漸化式 [A′] の一般項は $a_n=\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$

となり，入試問題の解となります。

§4. 漸化式 $c_{n+1}=\dfrac{p_{11}c_n+p_{12}}{p_{21}c_n+p_{22}}$ について

漸化式 [B] において，$b_n\neq 0$ ($n=1, 2, 3, \cdots$) と仮定すると，

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{p_{11}a_n+p_{12}b_n}{p_{21}a_n+p_{22}b_n}=\frac{p_{11}\times\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)+p_{12}}{p_{21}\times\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)+p_{22}}$$

ここで，$c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$ とおくと

[C] $c_{n+1}=\dfrac{p_{11}c_n+p_{12}}{p_{21}c_n+p_{22}}$

となります。つまり，漸化式 [B] が解ければ [C] も解けることになります。このことから，

$$c_{n+1}=\frac{\cos\theta\cdot c_n-\sin\theta}{\sin\theta\cdot c_n+\cos\theta},\quad c_1=\frac{a_1}{b_1}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}$$

の一般項は

$$c_n=\frac{1}{\tan n\theta}$$

となります（ただし，$\tan n\theta\neq 0$ とします）。

《参考文献》

〔1〕 数研通信 47 号　数研出版

（福島県立福島高等学校）