3点を通る放物線の方程式について

納城(のうき)　孝史(たかし)

§0. はじめに

参考文献〔1〕で，3点を通る放物線の方程式を連立方程式で解かない方法が試みられ，参考文献〔2〕で，重心座標を連立方程式で解かない方法が試みられている。

いくつか例題を挙げて，連立方程式で解かない方法を述べたい。

§1. 3点を通る放物線の方程式

以下，放物線を表す2次関数，直線を表す1次関数をそれぞれ単に，2次関数，1次関数という。

例題　3点 A(1, 5), B(3, 7), C(4, 17) を通る2次関数 $f(x)$ を求めよ。

方法1

3点 A(1, 5), (3, 0), (4, 0) を通る2次関数は

$$f_0(x)=5\cdot\frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)},$$

3点 (1, 0), B(3, 7), (4, 0) を通る2次関数は

$$f_1(x)=7\cdot\frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)},$$

3点 (1, 0), (3, 0), C(4, 17) を通る2次関数は

$$f_2(x)=17\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)}$$

である。

3点 A(1, 5), B(3, 7), C(4, 17) を通る2次関数は

$$f(x)=f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)$$

であるから，$f(x)=3x^2-11x+13$ である。

方法2

点 A(1, 5) を通る1次関数は

$$f_1(x)=5+\lambda_1(x-1),\ \lambda_1 \text{ は定数}$$

と表されるから，2点 A(1, 5), B(3, 7) を通る1次関数は，$f(3)=7$ より $\lambda_1=1$ となり，$f_1(x)=x+4$ である。

2点 (1, 0), (3, 0) を通る2次関数は

$$f_2(x)=\lambda_2(x-1)(x-3),\ \lambda_2 \text{ は定数}$$

と表される。

2点 A(1, 5), B(3, 7) を通る2次関数は

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

すなわち，

$$f(x)=x+4+\lambda_2(x-1)(x-3)$$

である。

3点 A(1, 5), B(3, 7), C(4, 17) を通る2次関数は，$f(4)=17$ より $\lambda_2=3$ となり，$f(x)=3x^2-11x+13$ である。

方法3

$$\begin{vmatrix} y & x^2 & x & 1 \\ 5 & 1^2 & 1 & 1 \\ 7 & 3^2 & 3 & 1 \\ 17 & 4^2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

で決まる x の関数 y が求める2次関数であることは，行列式の性質から明らかであろう。

実際，y, x^2, x, 1 の1次結合$=0$ であること，$(x,\ y)$ がそれぞれ (1, 5), (3, 7), (4, 17) のとき，2つの行が相等しくなり，行列式$=0$ となるから。

よって，

$$y\begin{vmatrix} 1^2 & 1 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \\ 4^2 & 4 & 1 \end{vmatrix}-x^2\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \\ 17 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+x\begin{vmatrix} 5 & 1^2 & 1 \\ 7 & 3^2 & 1 \\ 17 & 4^2 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 5 & 1^2 & 1 \\ 7 & 3^2 & 3 \\ 17 & 4^2 & 4 \end{vmatrix}=0$$

より，$-6y+18x^2-66x+78=0$ となって，$y=3x^2-11x+13$ を得る。

方法2において，$f_1(x)$ を求めるとき，2点を通る1次関数の公式を用いてもよい。

方法1，2はグラフを描けば理解しやすいであろう。特に，方法2は，グラフ電卓やパソコンで，順々にグラフを描かれることをお薦めする。

$f(x_i)=y_i$, $i=0$, 1, 2, を満たす高々2次の整式 $f(x)$ を表す式を示しておこう。

方法1では，

$$f(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \qquad (1)$$

である。

方法2では，

$$f(x)=\lambda_0+\lambda_1(x-x_0)+\lambda_2(x-x_0)(x-x_1) \qquad (2)$$

ここで，λ_0，λ_1，λ_2 は，

$$f(x_0)=y_0,\ f(x_1)=y_1,\ f(x_2)=y_2$$

から順々に定まる定数である。

参考文献〔3〕によると，(1)はラグランジュの補間公式，(2)はニュートンの補間公式と呼ばれる。

方法3では，

$$\begin{vmatrix} y & x^2 & x & 1 \\ y_0 & x_0^2 & x_0 & 1 \\ y_1 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (3)$$

で決まる x の関数 y である。

これは，解析幾何学において，

2点 $(x_0,\ y_0)$，$(x_1,\ y_1)$ を通る直線の方程式は，

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$

であることを援用したものである。

(3)は便利な表現であるが，連立方程式をクラメールの公式で解く位の計算量が必要である。

$y=ax^2+bx+c$ が $f(x_i)=y_i$，$i=0,\ 1,\ 2$，を満たすような定数 a，b，c を求めるとき，a，b，c についての連立方程式

$$\begin{cases} x_0^2a+x_0b+c=y_0, \\ x_1^2a+x_1b+c=y_1, \\ x_2^2a+x_2b+c=y_2 \end{cases}$$

を，クラメールの公式によって解くと，

$$a=\begin{vmatrix} y_0 & x_0 & 1 \\ y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}\Big/D,$$

$$b=\begin{vmatrix} x_0^2 & y_0 & 1 \\ x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}\Big/D,$$

$$c=\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & y_0 \\ x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}\Big/D,$$

ただし，$D=\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}$ である。

よって，

$$\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}y-\begin{vmatrix} y_0 & x_0 & 1 \\ y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}x^2+\begin{vmatrix} y_0 & x_0^2 & 1 \\ y_1 & x_1^2 & 1 \\ y_2 & x_2^2 & 1 \end{vmatrix}x-\begin{vmatrix} y_0 & x_0^2 & x_0 \\ y_1 & x_1^2 & x_1 \\ y_2 & x_2^2 & x_2 \end{vmatrix}=0$$

となり，これをひとつの行列式で表したものが(3)である。

このように，(3)は，定数 a，b，c をクラメールの公式によって連立方程式を解いていることに等しい。このことは(4)も同様である。

行列式については，次のように帰納的に導入すれば，大きな困難はないであろう。

$$|a_1|=a_1,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1|b_2|-b_1|a_2|,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}-d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

等々。これらから，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2$$

は容易に示される。

以上の3つの方法は，3次以上の整式についても適用できる。

§2. 重心座標

三角形ABCの頂点A，B，Cの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とするとき，任意の点Pの位置ベクトル $\vec{p}$ に対して，

$$\vec{p}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c},\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$$

である実数 λ_1, λ_2, λ_3 がただ一組存在し，λ_1, λ_2, λ_3 は位置ベクトルの始点に依らない。

上の事実の証明は容易なので省略する。

このとき，$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ をPの重心座標という。

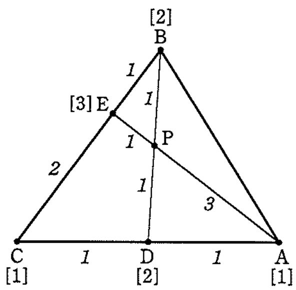
次の例題は参考文献〔2〕$p.4$ の例1である。

例題　△ABC において，CA の中点をD，CB を 2：1 の比に内分する点をEとする。AE と BD の交点をPとするとき，$\overrightarrow{CP}$ を $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ で表せ。

目標は，点Pの重心座標を求めることである。A, B, C, P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ とする。例題においては，Cが始点であるから，$\vec{c}=\vec{0}$ である。

拙著〔4〕にしたがい，物理の梃子（てこ）の原理を用いる。

まず，頂点 A, B, C にそれぞれ 1, 2, 1 の重さの錘（おもり）をおく。図では，錘の重さを［　］で囲んで示す。



辺 CA がつりあう点はDで，Dに 2 の重さの錘があるとみなす。辺 CB がつりあう点はEで，Eに 3 の重さの錘があるとみなす。

D，Eの位置ベクトルはそれぞれ

$$\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2},\ \frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

である。

辺 AE がつりあう点はPで，A，E にそれぞれ 1, 3 の重さの錘があるから，AP：PE＝3：1 である。

よって，

$$\vec{p}=\frac{1}{4}\left(1\cdot\vec{a}+3\cdot\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

あるいは，辺 BD がつりあう点はPで，B，D にそれぞれ 2, 2 の重さの錘があるから，BP：PD＝1：1 である。よって，

$$\vec{p}=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}+\vec{b}\right)=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

いずれにしても，Pの重心座標は $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ である。

$\vec{c}=\vec{0}$ より，$\vec{p}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ となり，

$$\overrightarrow{CP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

このような梃子の原理を用いて重心を求める方法の根拠は，次の通りである。

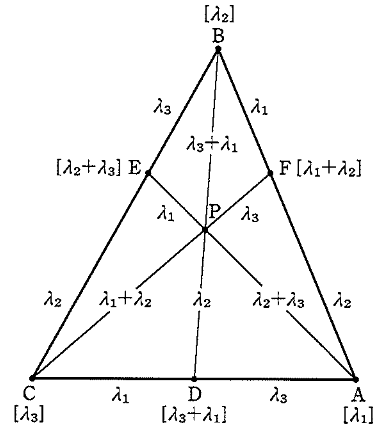
点Pの重心座標が $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ のとき，

$$\vec{p}=\lambda_1\vec{a}+(\lambda_2+\lambda_3)\frac{\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}}{\lambda_2+\lambda_3}$$

より，BC を $\lambda_3：\lambda_2$ の比に分ける点をEとすれば，Pは AE を $(\lambda_2+\lambda_3)：\lambda_1$ の比に分ける。

その他も同様である。

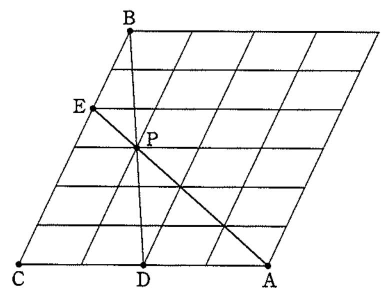
錘の重さと比の関係を図示すると，



重心座標の成分と辺の比の関係を求め易くするために，梃子の原理を使う。方便である。

次に，初等幾何による方法を示そう。

三角形 ABC からできる平行四辺形を作り，図のように平行線を引くと，



$$\overrightarrow{CP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

であることが容易にわかる。

これを，辺の比として表現したものが，

AP：PE＝3：1，BP：PD＝1：1

である。

重心座標は始点に依らないから，Pの重心座標は $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$，すなわち，$\vec{p}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$ である。

座標を導入すると，座標平面(直交座標系，斜交座標系)において，A(1, 0)，B(0, 1)，C(0, 0) とすれば，$\mathrm{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$，$\mathrm{E}\left(0, \frac{2}{3}\right)$ である。このとき，2直線 AE：$x+\dfrac{y}{\frac{2}{3}}=1$，DB：$\dfrac{x}{\frac{1}{2}}+y=1$ の交点Pの座標 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ が重心座標の第1，2成分であり，重心座標は $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ である。

先の初等幾何による方法では，連立方程式を解かずに，点Pの座標を求めたのであった。

§3. 3点を通る円の方程式

次の例は数研出版の教科書の例題である。

> **例題**　3点 A(0, 5)，B(4, 3)，C(2, −1) を通る円の方程式を求めよ。また，この円の中心の座標と半径の大きさを求めよ。

§1. の方法3によると，

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 25 & 0 & 5 & 1 \\ 25 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

が求める円の方程式である。

よって，$x^2+y^2-2x-4y-5=0$ である。

円の中心の座標と半径の大きさを求めるのは省略。

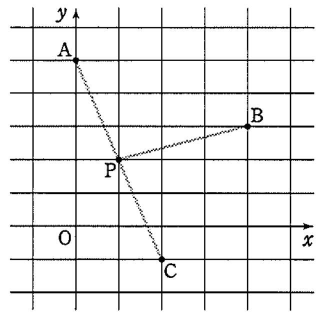
一般に，3点 (x_i, y_i)，$i=0, 1, 2$，を通る円の方程式は

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_0{}^2+y_0{}^2 & x_0 & y_0 & 1 \\ x_1{}^2+y_1{}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2{}^2+y_2{}^2 & x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

である。

円の方程式を求めてから，円の中心の座標と半径の大きさを求めるという手順を逆にして，先に円の中心を決定しよう。

座標平面に3点A，B，Cをとり，それらから等距離の点を探す。試行錯誤を何回かやると，円の中心 P(1, 2) が見つかるであろう。AP，BP，CP の長さをピタゴラスの定理(三平方の定理)で求めると，それらが互いに等しく，$\sqrt{10}$ であることがわかるから，円の中心は (1, 2)，半径は $\sqrt{10}$ である。



これは，円の中心 (a, b) についての連立方程式

$$a^2+(b-5)^2=(a-4)^2+(b-3)^2=(a-2)^2+(b+1)^2$$

を，図によって解いたといえる。

《参考文献》

〔1〕 高橋敏雄「3点を通る放物線の方程式を連立方程式で解かない方法はないか」
数研通信 No.56 *pp.*14〜16

〔2〕 中原克芳「連立方程式を解かない解法(ベクトル編)」数研通信 No.66 *pp.*4〜6

〔3〕 ファン・デル・ヴェルデン 現代代数学1
東京図書 *pp.*88〜89

〔4〕 納城孝史 モノグラフ6 図形と方程式
科学新興社 *pp.*22〜23, *pp.*28〜29

(大阪府立港南造形高等学校)