2次曲線の接線について（Ⅰ）

片岡（かたおか）　宏信（ひろのぶ）

§1. はじめに

2次曲線(楕円，双曲線，放物線)は平行でない2直線 $f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ を表す式，

$$f(x,\ y)=ax+by+c,$$
$$g(x,\ y)=dx+ey+f$$

を使って次のように表されることが知られている。

楕円：

$$f(x,\ y)^2+g(x,\ y)^2=k \quad (k>0) \tag{1.1}$$

双曲線：

$$f(x,\ y)g(x,\ y)=k \quad (k\neq 0) \tag{1.2}$$

放物線：

$$kf(x,\ y)=g(x,\ y)^2 \quad (k\neq 0) \tag{1.3}$$

ここでは，上のように2次曲線を表したとき，接点$(p,\ q)$における接線の式が，$f(x,\ y)$と$g(x,\ y)$という2つの式を使って，どのように表されるかを考察する。

§2. 2次曲線の接線（Ⅰ）

2次曲線上の点$(p,\ q)$における接線の方程式は，次の処方でつくることができる。

$$x^2\to px,\quad y^2\to qy$$
$$xy\to\frac{py+qx}{2},\quad x\to\frac{p+x}{2},\quad y\to\frac{q+y}{2} \tag{2.1}$$

したがって，

> 2次曲線 $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ (2.2)
> 上の点$(p,\ q)$における接線の方程式は
> $$apx+bqy+c\frac{py+qx}{2}+d\frac{p+x}{2}+e\frac{y+q}{2}+f$$
> $$=0 \tag{2.3}$$
> と表すことができる。

証明：

式(2.2)の両辺をxで微分すると，

$$2ax+2by\frac{dy}{dx}+cy+cx\frac{dy}{dx}+d+e\frac{dy}{dx}=0$$

となる。これを整理すると

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2ax+cy+d}{2by+cx+e} \tag{2.4}$$

したがって，接点$(p,\ q)$における接線の傾きは $2bq+cp+e\neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2ap+cq+d}{2bq+cp+e}$$

である。よって，接線の方程式は

$$y=-\frac{2ap+cq+d}{2bq+cp+e}(x-p)+q$$
$$=-\frac{2ap+cq+d}{2bq+cp+e}x+\frac{2ap^2+2cpq+dp+2bq^2+eq}{2bq+cp+e}$$

ここで，点$(p,\ q)$は2次曲線(2.2)上の点であるから

$$ap^2+bq^2+cpq+dp+eq+f=0 \tag{2.5}$$

を満たす。よって，

$$2ap^2+2bq^2+2cpq+dp+eq=-eq-dp-2f$$

より，接線の式は

$$y=-\frac{2ap+cq+d}{2bq+cp+e}x-\frac{eq+dp+2f}{2bq+cp+e} \tag{2.6}$$

となる。

一方，式(2.3)を変形すると

$$y=-\frac{2ap+cq+d}{2bq+cp+e}x-\frac{dp+eq+2f}{2bq+cp+e}$$

となる。これは，上で求めた接線の式(2.6)と一致する。$2bq+cp+e=0$ のとき接線は $x=p$ となり，(2.3)から得られる式と一致する。したがって，式(2.3)は2次曲線(2.2)上の点$(p,\ q)$における接線の方程式になっている。 ■

したがって，2次曲線の点$(p,\ q)$における接線の方程式は，処方(2.1)でつくることができる。

これにより，次のよく知られた2次曲線の接線の公式を得ることができる。

例：円

$$x^2+y^2=r^2 \tag{2.7}$$

上の点$(p,\ q)$における接線の方程式は，(2.1)より

$$px+qy=r^2 \tag{2.8}$$

となる。

例：楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2.9}$$

上の点$(p,\ q)$における接線の方程式は，(2.1)より

$$\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1 \tag{2.10}$$

となる。

例：双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2.11}$$

上の点$(p,\ q)$における接線の方程式は，(2.1)より

$$\frac{px}{a^2}-\frac{qy}{b^2}=1 \tag{2.12}$$

となる。

例：放物線

$$y^2=4ax \tag{2.13}$$

上の点$(p,\ q)$における接線の方程式は，(2.1)より

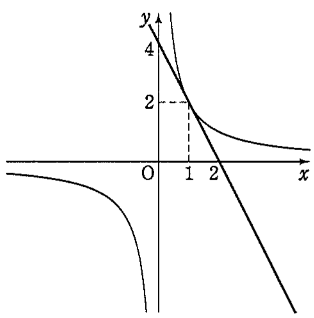
$$qy=2a(x+p) \tag{2.14}$$

となる。

例：$xy=2$ の形で表された双曲線上の点$(1,\ 2)$における接線の式は，(2.1)により

$$2x+y=4$$

と求められる。



（図１）

§3. 2次曲線の接線（II）

接線を求める処方(2.1)は一般に

$$f(x,\ y)=ax+by+c,\quad g(x,\ y)=dx+ey+f$$

を使った2次曲線の式(1.1)，(1.2)，(1.3)にも応用できる。

(1)楕円

> 楕円 $f(x,\ y)^2+g(x,\ y)^2=k \quad (k>0)$
> の接点$(p,\ q)$における接線の方程式は
> $$f(p,\ q)f(x,\ y)+g(p,\ q)g(x,\ y)=k \tag{3.1}$$

証明：楕円

$$f(x,\ y)^2+g(x,\ y)^2=k$$

を

$$(ax+by+c)^2+(dx+ey+f)^2=k$$

とかく。展開すると，

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2+2abxy+2acx+2bcy$$
$$+d^2x^2+e^2y^2+f^2+2dexy+2dfx+2efy=k$$

上の処方(2.1)により

$$a^2px+b^2qy+c^2+ab(xq+py)+ac(x+p)$$
$$+bc(y+q)+d^2px+e^2qy+f^2+de(xq+py)$$
$$+df(x+p)+ef(y+q)=k$$

これを整理すると

$$(ap+bq+c)(ax+by+c)$$
$$+(dp+eq+f)(dx+ey+f)=k$$

となるから，

$$f(p,\ q)f(x,\ y)+g(p,\ q)g(x,\ y)=k$$

が導かれる。 ∎

これにより，楕円を平行移動したときの接線の求め方も容易に理解できる。よく知られているのは，中心が原点以外にある円についての接線の公式である。

例：中心$(a,\ b)$，半径rの円

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{3.2}$$

上の点$(p,\ q)$における接線の方程式は

$$f(x,\ y)=x-a,\quad g(x,\ y)=y-b,\quad k=r^2$$

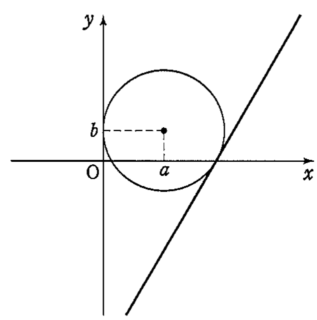
とおくと，式(3.1)

$$f(p,\ q)f(x,\ y)+g(p,\ q)g(x,\ y)=k$$

より，

$$(p-a)(x-a)+(q-b)(y-b)=r^2 \tag{3.3}$$

となる。



（図２）

例：楕円

$$\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(y+1)^2}{2}=1$$

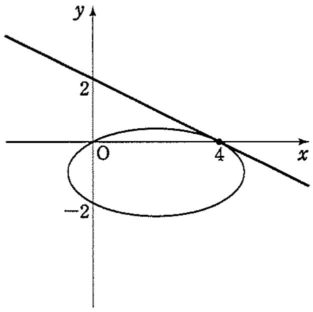
上の点$(4,\ 0)$における接線の方程式は，(3.1)より

$$\frac{(4-2)}{2\sqrt{2}}\frac{(x-2)}{2\sqrt{2}}+\frac{(0+1)}{\sqrt{2}}\frac{(y+1)}{\sqrt{2}}=1$$

となる。これを整理すると，

$$x+2y-4=0$$

となる。



（図3）

例：楕円

$f(x,\ y)=x+y-1,\ g(x,\ y)=2x-y+2,\ k=8$

とおくと，

$$(x+y-1)^2+(2x-y+2)^2=8$$

は楕円を表している。楕円上の点$(1,\ 2)$における接線の式は，式(3.1)より

$$f(1,\ 2)f(x,\ y)+g(1,\ 2)g(x,\ y)=8$$

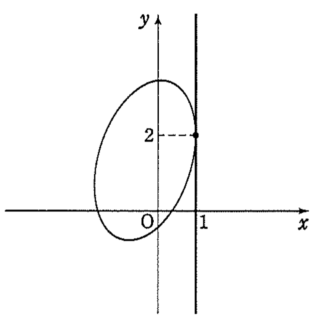
となるから，

$$2(x+y-1)+2(2x-y+2)=8$$

これを整理すると

$$x=1$$

となる。



（図4）

(2)双曲線

> 双曲線 $f(x,\ y)g(x,\ y)=k\quad(k\neq 0)$
> の接点$(p,\ q)$における接線の方程式は
> $$\frac{f(p,\ q)g(x,\ y)+f(x,\ y)g(p,\ q)}{2}=k \qquad (3.4)$$

証明：双曲線

$$f(x,\ y)g(x,\ y)=k$$

を

$$(ax+by+c)(dx+ey+f)=k$$

とかく。展開して

$$adx^2+bey^2+cf+(ae+bd)xy$$
$$+(af+cd)x+(bf+ce)y=k$$

処方(2.1)により

$$adpx+beqy+cf+(ae+bd)\frac{qx+py}{2}$$
$$+(af+cd)\frac{p+x}{2}+(bf+ce)\frac{q+y}{2}=k$$

これを整理すると

$$(ap+bq+c)(dx+ey+f)$$
$$+(ax+by+c)(dp+eq+f)=2k$$

となるから，

$$\frac{f(p,\ q)g(x,\ y)+f(x,\ y)g(p,\ q)}{2}=k$$

となる。 ■

例：双曲線

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1$$

の接点$(p,\ q)$における接線の方程式は

$$f(x,\ y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b},\ g(x,\ y)=\frac{x}{a}-\frac{y}{b},\ k=1$$

とおくと，式(3.4)

$$\frac{f(p,\ q)g(x,\ y)+f(x,\ y)g(p,\ q)}{2}=k$$

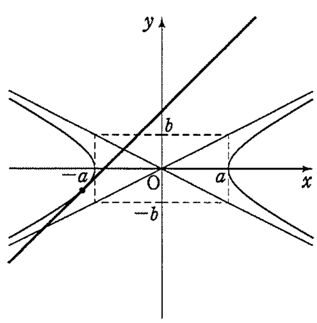
より，

$$\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)+\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{p}{a}-\frac{q}{b}\right)=2$$

となる。これを整理すると

$$\frac{px}{a^2}-\frac{qy}{b^2}=1$$

となる。



（図5）

例：双曲線

$f(x,\ y)=x+y-1,\ g(x,\ y)=2x-y+2,\ k=4$

とおくと，

$$(x+y-1)(2x-y+2)=4$$

は双曲線を表している。双曲線上の点(1，2)における接線の式は，式(3.4)より

$$\frac{f(1,\ 2)g(x,\ y)+f(x,\ y)g(1,\ 2)}{2}=4$$

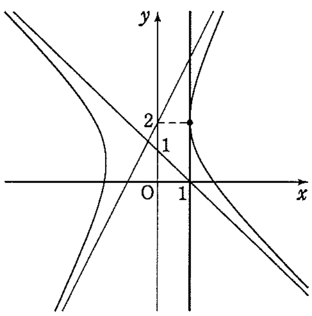
である。これより，

$$2(2x-y+2)+2(x+y-1)=4$$

これを整理すると

$$x=1$$

となる。



(図 6)

(3)放物線

> 放物線 $kf(x,\ y)=g(x,\ y)^2 \quad (k \neq 0)$
> の接点$(p,\ q)$における接線の方程式は
> $$k\frac{f(p,\ q)+f(x,\ y)}{2}=g(p,\ q)g(x,\ y) \qquad (3.5)$$

証明：放物線

$$kf(x,\ y)=g(x,\ y)^2$$

を

$$k(ax+by+c)=(dx+ey+f)^2$$

とかく。展開すると，

$$kax+kby+kc$$
$$=d^2x^2+e^2y^2+f^2+2dexy+2dfx+2efy$$

となる。ここで，処方(2.1)により

$$ka\frac{p+x}{2}+kb\frac{q+y}{2}+kc=d^2px+e^2qy+f^2$$
$$+de(qx+py)+df(x+p)+ef(y+q)$$

これを整理すると

$$k\frac{ap+bq+c+ax+by+c}{2}$$
$$=(dp+eq+f)(dx+ey+f)$$

となるから

$$k\frac{f(p,\ q)+f(x,\ y)}{2}=g(p,\ q)g(x,\ y)$$

が導かれる。 ■

例：放物線

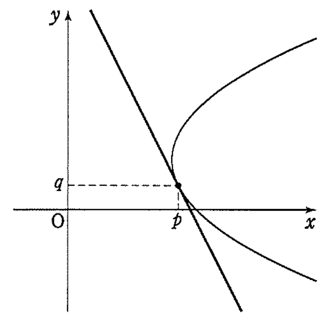
$$2(x-a)=(y-b)^2$$

上の点$(p,\ q)$における接線の方程式は，(3.5)より

$$x-a+p-a=(q-b)(y-b)$$

となる。これより

$$x+p-2a=(q-b)(y-b)$$



(図 7)

例：放物線

$f(x,\ y)=x+y-1,\ g(x,\ y)=2x-y+2,\ k=2$

とおくと，

$$2(x+y-1)=(2x-y+2)^2$$

は放物線を表している。放物線上の点(1，2)における接線の式は，式(3.5)より

$$2\frac{f(1,\ 2)+f(x,\ y)}{2}=g(1,\ 2)g(x,\ y)$$

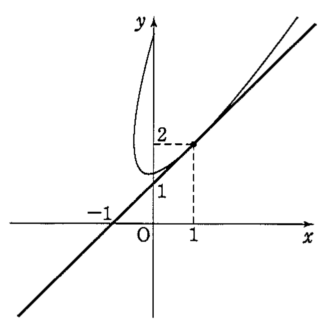
となる。これより，

$$2\frac{2+(x+y-1)}{2}=2(2x-y+2)$$

これを整理すると

$$y=x+1$$

となる。



(図 8)

§4. おわりに

2次曲線の接点が与えられたときの接線の公式を導いた。処方(2.1)は2次曲線が楕円・双曲線・放物線のいずれを表しているかを問わず使える式である。

また，2次曲線を$f(x, y)$，$g(x, y)$の式を使って，式(1.1)，(1.2)，(1.3)のように表したときにも同様の処方が使えることを示した。すなわち接点(p, q)における接線の方程式は次の処方で表される。

$$f(x, y)^2 \to f(p, q)f(x, y),$$
$$g(x, y)^2 \to g(p, q)g(x, y)$$
$$f(x, y)g(x, y) \to \frac{f(p, q)g(x, y)+f(x, y)g(p, q)}{2}$$
$$f(x, y) \to \frac{f(p, q)+f(x, y)}{2}$$
$$g(x, y) \to \frac{g(p, q)+g(x, y)}{2} \qquad (5.1)$$

2次曲線の式(1.1)，(1.2)，(1.3)が標準形といわれる式から，一次変換と平行移動されたものをも含む一般的な2次曲線を表すものであるので，上の処方はそのような一般的な2次曲線に対して使える処方となっている。

《参考文献》

〔1〕 片岡宏信「二次曲線の統一的理解」日本数学教育学会誌(2002) 第84巻 第5号 *pp.*29〜34
〔2〕 片岡宏信「双曲線を表す一般形について」数研通信(1996) No.26 *pp.*26〜28
〔3〕 片岡宏信「二次曲線の新しい統一的理解」数研通信(2000) No.37 *pp.*26〜28
〔4〕 新編数学II，新編数学C(第一学習社)
〔5〕 チャート式数学C(数研出版)
〔6〕 共立数学公式(共立出版株式会社)

(兵庫県立福崎高等学校)