入試の難問とアーベル積分の逆関数

宮川（みやかわ）　幸隆（ゆきたか）

§1. ’06年入試問題から

’06年の入試問題に，アーベル積分の逆関数と関連のある難問が出題されました。それは以下の問題です。

> 以下の各問いに答えよ。
>
> (1) 関数 $g(x)=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。
>
> (2) 次の 2 条件(a), (b)を満たす微分可能な関数 $\varphi(x)$ およびその逆関数 $h(x)$ を求めよ。
>
> (a) $\varphi(0)=0$　　(b) $\varphi'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
>
> (3) 次の 4 条件(a), (b), (c), (d)を満たす連続微分可能な関数 $f(x)$ を求めよ。
>
> (a) $f(0)=1$　　(b) $f'(0)=0$
>
> (c) すべての実数 a に対して $f(a)=f(-a)$ が成立する。
>
> (d) 正の実数 t に対して座標平面上の曲線 $y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq t)$ の長さを $l(t)$ と表すとき，すべての正の実数 t に対して $l(t)=f'(t)$ が成立する。
>
> (東京医科歯科大(前期)の 3 番)

(3)は，(d)から，

$$l(t)=\int_0^t\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\ \ (t>0) \qquad (*)$$

です。関数 $s=l(t)$ は弧長を表すので，明らかに単調増加で，逆関数 $t=m(s)$ $(s>0)$ が存在します。

$(*)$から，$s=\displaystyle\int_0^{m(s)}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

この両辺を s で微分すると

$$1=\sqrt{1+\{f'(m(s))\}^2}\cdot m'(s)$$

(d)から $f'(m(s))=l(m(s))=s$ により，

$$1=\sqrt{1+s^2}\cdot m'(s) \qquad \therefore\ m'(s)=\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

また，$l(0)=\displaystyle\lim_{t\to+0}l(t)=\lim_{t\to+0}f'(t)$　[∵ (d)]

$$=f'(0)\quad [\because\ f(x)\text{が}\ C^1\ \text{級}]$$

$$=0\quad [\because\ (b)]$$

から，$m(0)=0$。よって，(2)の記号を用いて，

$$m(s)=\varphi(s) \qquad (※)$$

$$\therefore\ \varphi(s)=m(s)-m(0)=\int_0^s\frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} \qquad ①$$

$\dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ のような関数は s の**代数関数**と呼ばれ $\displaystyle\int_0^s\frac{ds}{\sqrt{1+s^2}}$ のような代数関数の積分は**アーベル積分**と呼ばれます。①と(2)から，$h(s)$ はアーベル積分の逆関数なのです。

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\varphi'(x)\quad [\because\ (2)\text{の(b)}]$$

から，

$$\varphi(x)=g(x)+C\quad (C\text{は定数})$$

で，

$$C=\varphi(0)-g(0)=0-0\quad [\because\ (2)\text{の(a)}]$$

から，

$$\varphi(x)=g(x)=\log(x+\sqrt{x^2+1})$$

ここで，$y=\varphi(x)$ とおくと，

$$e^y=x+\sqrt{x^2+1} \qquad ②$$

$$\therefore\ e^{-y}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$=-x+\sqrt{x^2+1} \qquad ③$$

②−③から，

$$x=\frac{e^y-e^{-y}}{2} \qquad \therefore\ h(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

(※)から逆関数へ移行すると，

$$l(s)=h(s)$$

$$\therefore\ f'(s)=l(s)=\frac{e^s-e^{-s}}{2}$$

$$\therefore\ f(s)=\frac{e^s+e^{-s}}{2}+C\quad (C\text{は定数})$$

$C=f(0)-1=1-1$ [∵ (a)]$=0$ から

$x\geqq0$ では

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad ④$$

ところで(c)から，任意の $a>0$ に対して，

$$f(-a)=f(a)=\frac{e^a+e^{-a}}{2}=\frac{e^{-a}+e^{-(-a)}}{2}$$

よって④は $x<0$ に対しても成立します。このようにして求まった④の関数 $f(x)$ は確かに**連続微分可能**。すなわち，C^1 級であり，(＊)から，$t(>0)$ に対して

$$l(t)=\int_0^t\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^t\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^t$$
$$=\frac{e^t-e^{-t}}{2}=f'(t)$$

が成立します。また，$f(x)$ が(a), (b), (c)を満たすことは明らかです。

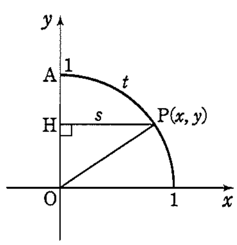
このように，この問題は確かに出題範囲外の問題でした。本当の問題文は(3)で「(a), (b), (c), (d)を満たす微分可能な関数 $f(x)$ を求めよ。」でしたが，上のように，「微分可能」を「連続微分可能」すなわち「C^1 級」に修正しました。

§2. 三角関数と双曲線関数の関係

さて，この問題の $h(x)$，$f(x)$ はそれぞれ，

$$\sinh(x),\ \cosh(x)$$

と表され，**双曲線正弦関数**(hyperbolic sine)，**双曲線余弦関数**(hyperbolic cosine)と呼ばれています。もちろん，三角関数 sin, cos と深い関係にあるのです。第1象限における単位円周上の動点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，右図のように，弧 AP の長さを t，垂線 PH の長さを s とすると，



$$\left.\begin{array}{l}x=s,\\ y=\sqrt{1-s^2},\\ 0\leqq s<1\end{array}\right\}⑤$$

であって，$s=\xi(s)$，$\sqrt{1-s^2}=\eta(s)$ とおくと，区間 $0\leqq s<1$ において $\xi(s)$，$\eta(s)$ は C^1 級であり，しかも，その区間で常に，

$$\xi'(s)^2+\eta'(s)^2=1+\left(\frac{-2s}{2\sqrt{1-s^2}}\right)^2=\frac{1}{1-s^2}\neq 0$$

であるから，曲線⑤は滑らかです。

よって左下の図において

$$t=\int_0^s\sqrt{\xi'(s)^2+\eta'(s)^2}\,ds=\int_0^s\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \quad ⑥$$

であり，この逆関数は

$$s=\sin(t)$$

です。

このように，三角関数 sin も，アーベル積分⑥の逆関数なのです。

そこで，

$$t=\int_0^s\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}=\sin^{-1}(s)$$

と書くことにします。

すると，

$$\frac{d\sin^{-1}(s)}{ds}=\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$$

であり，$\sin^{-1}(0)=0$ です。

三角関数 sin の $\sqrt{1-s^2}$ に対応する，双曲線正弦関数 sinh のそれは，

$$\sqrt{1+s^2}$$

です。そして，

$$\sqrt{1-\sin^2(x)}=\cos(x)$$

ですが，

$$\sqrt{1+\sinh^2(x)}=\cosh(x)$$

なのです。

そして，虚数単位 i を用いると，実は，

$$\sin(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\frac{\sinh(ix)}{i},$$

$$\cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\cosh(ix)$$

と書けるのです。更に，$\sinh(x)$ と $\cosh(x)$ に関しては，$\sin(x)$，$\cos(x)$ と類似の公式

$$\cosh(-x)=\cosh(x),$$
$$\sinh(-x)=-\sinh(x),$$
$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1,$$
$$\cosh(x_1+x_2)=\cosh(x_1)\cosh(x_2)+\sinh(x_1)\sinh(x_2),$$
$$\sinh(x_1+x_2)=\sinh(x_1)\cosh(x_2)+\cosh(x_1)\sinh(x_2),$$
$$\cosh(x_1+x_2)+\cosh(x_1-x_2)=2\cosh(x_1)\cosh(x_2),$$
$$\cosh(x_1+x_2)-\cosh(x_1-x_2)=2\sinh(x_1)\sinh(x_2),$$
$$\sinh(x_1+x_2)+\sinh(x_1-x_2)$$

$$=2\sinh(x_1)\cosh(x_2),$$

$$\sinh(x_1+x_2)-\sinh(x_1-x_2)$$

$$=2\cosh(x_1)\sinh(x_2),$$

$$\cosh(2x)=\cosh^2(x)+\sinh^2(x)$$

$$=1+2\sinh^2(x)$$

$$=2\cosh^2(x)-1,$$

$$\sinh(2x)=2\sinh(x)\cosh(x),$$

$$\cosh(3x)=4\cosh^3(x)-3\cosh(x),$$

$$\sinh(3x)=3\sinh(x)+4\sinh(x),$$

$$(\cosh(x)+\sinh(x))^n=\cosh(nx)+\sinh(nx),$$

$$\frac{d}{dx}\sinh(x)=\cosh(x),$$

$$\frac{d}{dx}\cosh(x)=\sinh(x)$$

等が成り立ちます。

上の問題の(2)の解は

$$\varphi(x)=\log(x+\sqrt{x^2+1})=\sinh^{-1}(x),$$

$$h(x)=\sinh(x)$$

でしたが，

> 次の 2 条件(a), (b)を満たす微分可能な関数 $\varphi(x)$ およびその逆関数 $h(x)$ を求めよ。
>
> (a) $\varphi(0)=0$ (b) $\varphi'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

という問題の解は，

$$\varphi(x)=\sin^{-1}(x),$$

$$h(x)=\sin(x)$$

なのです。

sin も sinh も**初等超越関数**と呼ばれますが，アーベル積分の逆関数の中には，もっと高等な**楕円関数**もあります。そして，これらの関数は数学(特に整数論)の中で非常に重要な役割を演じるのです。

《参考文献》

〔1〕 雑誌「大学への数学」2006 年 6 月号
特集 06 年大学入試問題 *pp*.59〜61

〔2〕 宮川幸隆，三角関数の微分法について，
数研通信「数学」No.36 *p*.26

(静岡県立静岡中央高等学校)