一瞬の利息 ―金利の方程式と連続複利―

正田(しょうだ) 隆之(たかゆき)

§0. はじめに

2008年のリーマンショック以降，金融工学という言葉をよく耳にするようになった。金融工学には，金利に関する知識，理論が必要不可欠であり，また，金利は数学の教材として扱われることもある。しかし，そのヴァリエーションの可能性はもっとあるのではないかと考える。

金利には，1年間に適用される金利もあれば，2年間や6ヶ月間に適用される金利もあり，これらは互いに無関係ではない。現在取引されている様々な金利は互いに，ある整合性をもって決められている。すなわち，ある金利を，他の**金利からなる方程式**の解として決定することができる。

また，様々な長さの期間に適用される金利は，普通，同じ期間の金利に直して比較することになる。例えば，2年の金利Rを6ヶ月の金利と比較するとき，金利Rは6ヶ月当たり何％の金利に相当するか，すなわち，**金利の平均**を求めることになる。

これら理論上算出される金利は，必ずしも実際に取引が行われている訳ではない。しかし，金融商品を設計する際に必要不可欠であり，**連続でなめらかな関数で定義した利息計算**も利用されている。

以下，単利と複利の計算方法，金利の方程式の考え方，連続複利計算の導出について解説する。

§1. 単利計算

元金1円を1年間預金したときの利息 を年利といい，金利とは普通この年利のことを指す。

例えば，元金200円を金利0.04(＝4％)で1年間預金したときの利息は次の通りである。

$$0.04\times200=8(\text{円})$$

さらに，元金200円を金利0.1(＝10％)で2年間預金したときの利息は次の通りである。

$$0.1\times200\times2=40(\text{円})$$

また，これと元金との合計は次の通りである。

$$200+40=240(\text{円})$$

一般に，元金A円を金利$R(=100R\%)$でT年間預金した場合の利息を**単利計算の利息**といい，次の計算で与えられる。

単利計算の利息	ART

また，「元金＋利息」の金額を**元利合計**といい，次の計算で与えられる。

単利計算の元利合計
$A+ART=A(1+RT)$

(例1)

元金10,000円を金利0.1(＝10％)で2年間預金した場合の元利合計

$$10{,}000\times(1+0.1\times2)=12{,}000\text{円}$$

(例2)

元金10,000円を金利0.02(＝2％)で3ヶ月間預金した場合の元利合計

3ヶ月$=\dfrac{1}{4}$年 として

$$\text{元利合計}=10{,}000\times\left(1+0.02\times\frac{1}{4}\right)$$
$$=10{,}050\text{円}$$

§2. 複利計算

複利計算とは，単利計算をくり返す計算のことである。ただし，くり返し計算をするときの金利はすべて同じ値となる。

(例3)

元金10,000円を金利0.05(＝5％)で**1年ごとの複利計算**で2年間預金する場合の計算は次の手順で行われる。

<u>step 1</u>

1年間の元利合計を計算する。

$$10{,}000\times(1+0.05\times1)=10{,}000\times1.05$$
$$=10{,}500$$

step 2

step 1 で求めた元利合計を新たな元金として再び 1 年預金した場合の元利合計を計算する。

$$10{,}500\times(1+0.05\times1)=10{,}500\times1.05$$
$$=11{,}025$$

これが，元金 10,000 円を金利 0.05(＝5％) で**1 年ごとの複利計算**で 2 年間預金した場合の元利合計である。

(例 4)

元金 10,000 円を金利 0.04(＝4％) で**3 ヶ月ごとの複利計算**で 2 年間預金した場合の計算は次の手順で行われる。

step 1

3 ヶ月間の元利合計を計算する。

$$10{,}000\times\left(1+0.04\times\frac{1}{4}\right)=10{,}000\times1.01$$

step 2

step 1 で求めた元利合計を新たな元金として再び 3 ヶ月間預金した場合の元利合計を計算する。

$$(10{,}000\times1.01)\times\left(1+0.04\times\frac{1}{4}\right)$$
$$=10{,}000\times1.01^2$$

3 ヶ月ごとの複利計算の場合，1 年を 4 回に分割して利息計算をすることになるので 2 年間では $4\times2=8$ 回 の利息計算になる。以下，同様の計算を step 8 までくり返す。

step 8

step 7 で求めた元利合計を新たな元金として再び 3 ヶ月間預金した場合の元利合計を計算する。

$$10{,}000\times1.01^7\times\left(1+0.04\times\frac{1}{4}\right)$$
$$=10{,}000\times1.01^8$$

これが，元金 10,000 円を金利 0.04(＝4％) で**3 ヶ月ごとの複利計算**で 2 年間預金した場合の元利合計となる。

一般に，元金 A 円を金利 $R(=100R\%)$ で，1 年あたり n 回の複利計算で T 年間預金した場合，$n\times T$ 回の利息計算をすることになり，元利合計は次の式で与えられる。

年 n 回複利計算の元利合計

$$A\left(1+\frac{R}{n}\right)^{nT}$$

これにより，例 4 における 3 ヶ月ごとの各時点 t 年における元利合計は，

$$10{,}000\times1.01^{4t}$$

とできる。したがって，1 年 6 ヶ月時点における理論上の元利合計は $t=1.5$ 年 であるから，

$$10{,}000\times1.01^{4\times1.5}=10{,}615.2015\cdots\cdots$$

と計算できて，約 10,615 円となる。

§3. 金利の方程式

2 年間の預金に対する利息計算を考えよう。その方法は様々であり，例えば，理論上，次の①～④などが考えられる。

① 2 年の単利計算
② 1 年ごと複利計算
③ 3 ヶ月ごと複利計算
④ 1 年目と 2 年目で異なる金利を適用して計算

これらの計算をする際に適用される金利は，次の原則にしたがって決められる。

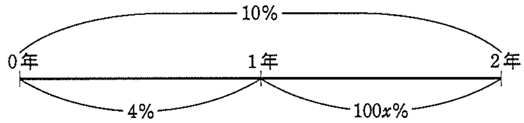
同じ元金を同じ期間だけ預金したときの元利合計が，利息計算の方法によらないように金利を決める

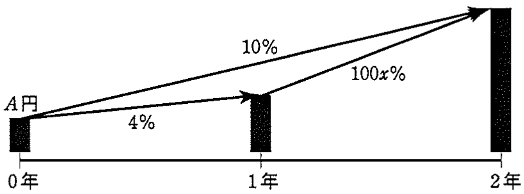
つまり，①～④のいずれの計算方法によっても 2 年後の最終的な元利合計が同じになるように金利を決めるということである。

もしも①～④の中で 1 つだけ元利合計が他よりも多くなるものがあると仮定すると，合理的に考えるなら，その預金以外には，だれもお金を預けようとはしない。つまり他の預金は存在しないことになる。したがって，①～④のすべての預金が存在するためには，いずれの元利合計も等しくならなければならない。そうなるように，金利が決められることになる。

(例 5)

1 年の金利 0.04(＝4％)，2 年の金利 0.1(＝10％) のとき，元金 A 円として，1 年後からの 1 年間の金利 $x(=100x\%)$ を求める。





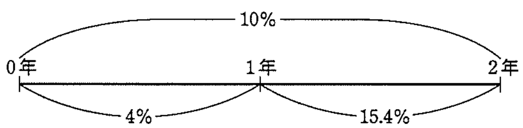
このとき，**金利 0.1 で 2 年間預金したときの元利合計が，金利 0.04 で 1 年間預金したときの元利合計を新たな元金として，再び金利 x で 1 年間預金したときの元利合計**と同じになることから，次の方程式を得る。

$$A\times(1+0.1\times2)$$
$$=A\times(1+0.04\times1)\times(1+x\times1)$$

これを解いて，

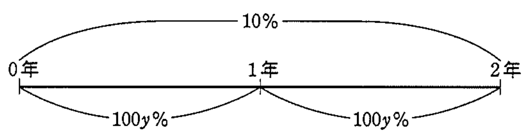
$$x=\frac{1.2}{1.04}-1=0.1538\cdots\cdots$$

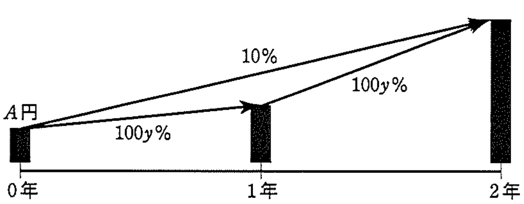
よって，1 年後からの 1 年間の金利は，約 0.154(=15.4％) となる。



（例 6）

例 5 と同様に 2 年の金利 0.1(=10％) のとき，同じ 2 年間で元金A円として，1 年ごとの複利計算をする際に適用する金利 y(=100y％) を求める。





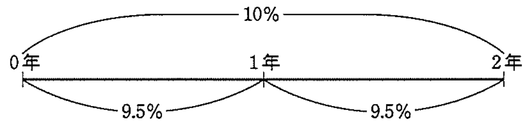
このとき，**金利 0.1 で 2 年間預金したときの元利合計が，金利 y で 1 年ごと複利計算で 2 年間預金したときの元利合計**と同じになることから，次の方程式を得る。

$$A\times(1+0.1\times2)=A\times(1+y\times1)^2$$

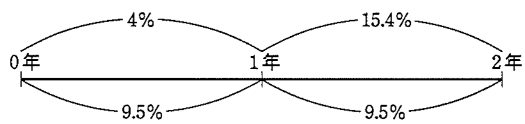
これを解いて，

$$y=\sqrt{1.2}-1=0.0954\cdots\cdots$$

よって，同じ 2 年間で 1 年ごとの複利計算をする際に適用する金利は，約 0.0954(=9.54％) となる。



例 5 と例 6 から，**金利 0.04 で 1 年間預金したときの元利合計を新たな元金として，再び金利 0.154 で 1 年間預金したときの元利合計**と，**金利 0.095 で 1 年ごと複利計算で 2 年間預金したときの元利合計**が等しくなることがいえる。



このことは，金利 0.04 と 0.154 を平準化したものが 0.095 であることを意味する。つまり，複利計算に適用する金利は，各期間に適用される金利の平均と見なすことができ，この 2 年間は**1 年あたりの金利が平均 0.095** であるといえる。

§4. 連続複利

§2. では，下に示す年 n 回すなわち $1/n$ 年ごとの複利計算の元利合計の式を得た。

$$\text{元利合計}=A\left(1+\frac{R}{n}\right)^{nT}$$

これにより，複利計算は理論上，各計算期間を 1 年ごとや 3 ヶ月ごとなど様々に設定できる。したがって，この期間をもっと短くした「1 日ごと複利」，「1 秒ごと複利」も定義が可能である。

ここでは，この各利息計算期間を限りなく短くした場合，元利合計はどのような式で表されるかを考える。これは，元利合計の式について，n を無限に大きくすることによって求めることができる。すなわち，

$$\lim_{n\to\infty}A\left(1+\frac{R}{n}\right)^{nT}$$

を計算することになる。これを変形して，次の式を得る。

$$\lim_{n\to\infty} A\left\{\left(1+\frac{R}{n}\right)^{\frac{n}{R}}\right\}^{RT}\cdots\cdots※$$

ここで，$t=\frac{n}{R}$ とおくと，$n\to\infty$ に対して，$t\to\infty$ であるから

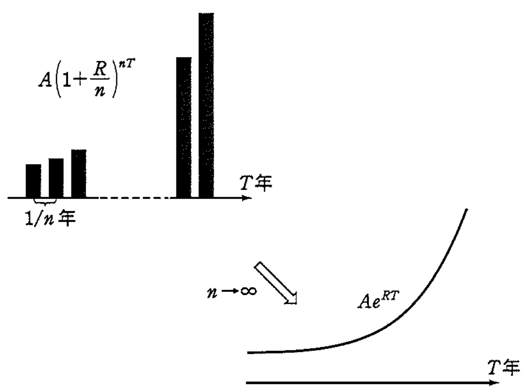
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{R}{n}\right)^{\frac{n}{R}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$$

（e は自然対数の底）

これにより，※を計算すると次のようになる。

$$\lim_{n\to\infty} A\left\{\left(1+\frac{R}{n}\right)^{\frac{n}{R}}\right\}^{RT}=Ae^{RT}$$

これが限りなく短い期間すなわち一瞬ごとに複利計算したときの元利合計である。この利息計算を**連続複利計算**という。



連続複利の元利合計
Ae^{RT}

これにより，元利合計の変化を平均的，連続的かつなめらかに捉えることができる。

ここで，T_0 年間の金利が単利 $r(=100r\%)$ のときの，この期間に適用する連続複利の金利 $R(=100R\%)$ の値を求めよう。このとき，最終的な元利合計が等しくなるという原則から，次の等式が成立する。

$$A(1+rT_0)=Ae^{RT_0}$$

これを R について解くと，次の式を得る。

$$R=\frac{\log(1+rT_0)}{T_0}$$

これにより，連続複利の計算に適用する金利が定まる。

（例７）

２年の金利 0.1(＝10％) を連続複利に変換する。

$$\frac{\log(1+0.1\times 2)}{2}=0.09116\cdots\cdots$$

よって，約 0.091(＝9.1％) となる。このとき，例えば，10,000円を５秒間預金した場合の元利合計を計算する。５秒を年に直すと，

$$5\times\frac{1}{60}\times\frac{1}{60}\times\frac{1}{24}\times\frac{1}{365}\text{年}$$

であるから

$$10{,}000\times e^{0.091\times\frac{5}{60\times 60\times 24\times 365}}=10{,}000.000144\cdots\cdots\text{円}$$

これは，10,000円をこの２年間のうち，５秒間だけ，預金した場合，平均 0.000144 円の利息がつくことを意味している。

連続複利計算は，任意の実数値の期間設定を可能にする。そのため，その連続複利計算が定義される範囲内の期間であれば，どのような中途半端な期間でも理論上の元利合計の計算が可能になる。

例えば，２日後に買う約束をした商品Ａを今買うならば，いくらになるのか。２時間後に売る約束をしている商品Ｂを今売るならば，いくらになるのか。理論上の値ではあるが，そのような計算を容易にすることができる。

（北海道札幌西高等学校）