重複円順列・重複数珠順列について

山田 一男（やまだ かずお）

§1. はじめに

教科書傍用問題集に，次のような問題があった。

白玉1個，赤玉2個，青玉4個がある。 (1) これらを机の上に円形に並べる方法は何通りあるか。 (2) 略

これを授業で扱ったとき，正解を導いていた生徒の中に「白玉の個数が1個でなく，もっと増えたら場合分けが大変になる」といった発言や，円順列であることを無視して同じものを含む場合の順列の公式をそのまま適用する不注意な生徒の中に，「この場合の公式はないの？」とかの意見があった。確かに，白玉の1個を固定して，残りの赤玉2個，青玉4個の順列の総数

$$\frac{6!}{2!4!}=15$$

として解答は得られるので，白玉の個数が2個とか，もっと増えると，場合分けが煩雑になり，解への見通しが立ちにくくなる。教科書には，一列に並べる順列では，重複を許す場合や同じものを含む場合の公式も記述されているが，円順列では重複を許さない場合しか記述されていないので，これを一般化しようとする生徒の発想は，自然なものである。さらに，指導要領が指導上の最低基準という見解が示された現在，公式の一般化・拡張を考えることは意味深いことと考える。「重複円順列・数珠順列」および「同じものを含む円順列・数珠順列」のアルゴリズムを考えた。

§2. 研究の方法

「重複円順列」「同じものを含む円順列」について，自分自身知識がなく，ネットを調べても，言葉および表現はあるが，公式として明記されている等式や，アルゴリズムを見つけることができなかった。しかし，偶然，雑誌「理系への数学」(現代数学社) 2007年4月号の記事「数学を楽しむ/バーンサイドの補題 (大阪経済大学　西山豊)」を読み，バーンサイドの補題 (Burnside's Lemma) を知り (学生時代に聴いていたかもしれないが………)，この補題を，ある順列の集合および，回転などから成る群に適用することにより，重複円 (数珠) 順列，および同じものを含む円 (数珠) 順列を求める公式およびアルゴリズムを導き出した。単なる「Burnside's Lemma」の練習問題程度のことではあるが，「解いてみた」。

§3. 重複円順列および同じものを含む円順列の公式および，その証明

記号 $(a,\ b)$ は整数 a，b の最大公約数を表すものとする。

公式Ⅰ（重複円順列） n 種類の中から重複を許して r 個選び円形に並べる並べ方の総数は $\dfrac{1}{r}\sum_{k=1}^{r} n^{(r,k)}$ である。

〈公式Ⅰの証明〉

X を n 種類の中から重複を許して r 個選び並べる並べ方 (重複順列) 全体の集合，G を $\dfrac{2\pi}{r}k$ 回転を表す回転群 $(k=1,\ \cdots,\ r-1,\ r)$ とおくと，求めるべき値は $|X/G|=\dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X_g|$ (Burnside's Lemma による) である。ただし，$X_g=\{x|g\cdot x=x\}$，$|X/G|$ は回転によって重なるものは同じ順列と考えた重複円順列の総数とする。そこで，

$|X/G|=\dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X_g|$ の計算は次のようになる。

$|G|=r$，$\dfrac{2\pi}{r}k$ 回転で不変な順列の個数 $|X_{\frac{2\pi}{r}k}|$ は

$$|X_{\frac{2\pi}{r}k}|=n^{(r,k)} \quad \cdots\cdots①$$

である。

実際，r を $k=k_0$ で割った余りを k_1 とする。$k_1=0$

のときは，場所1，2，…，k_0 をどの玉にするかで，すべての場所の玉は決定される。したがって，並べ方は n^{k_0} 通りあるから，①は成立する。また，$1\leqq k_1<k_0$ のときは，p.5の表1の＃までは，1，2，…，k_0 が決まれば，残りは決定されるが，この場合はさらに条件が加わる。それは，表1の＃以降で，1，…，k_0 のうち，最後の k_1 個は表1の＃の直前の qk_0+1，…，qk_0+k_1 により，決定される。k_0 を法として考えれば，1，…，k_0 を決定するには，1，…，k_1 を決定することが必要十分である。そこで，k_0 を法として，1，…，k_0 の部分だけで，同様の表を作ると，表2となる。この表2の上下を入れ替えて，表2の¥までを右側に移すと，表3になり，さらに右側に追加し，左下を消去すると，表4になる。

そこで，上の議論を繰り返す。すなわち，k_0 を k_1 で割った余りを k_2 とすると，$k_0=q_1k_1+k_2$ とおくと，$1\leqq k_2<k_1$ のときを詳しく書き直すと，($k_2=0$ のときは終り) 表5になる。したがって，1，2，…，k_0 は1，2，…，k_1 で決定される。以下同様に繰り返すと，ユークリッドの互除法により，r と $k=k_0$ の最大公約数を $d=(r,\ k)$ とおくと，1，2，…，k_0 は1，2，…，d で決定される。

よって，$\dfrac{2\pi}{r}k$ 回転で不変な順列の個数は

$|X_{\frac{2\pi}{r}k}|=n^d$ である。したがって，

$$|X/G|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X_g|=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}|X_{\frac{2\pi}{r}k}|=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}n^{(r,k)}$$

である。　(証明終)

例　ゴンドラが6個ある観覧車がある。この6個のゴンドラを，赤，青，黄，緑の4色で塗装したい。塗装の仕方は何通りあるか。

(解答)

観覧車は回転するので，まさに重複円順列である。公式Ⅰにより，

$$\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}4^{(6,k)}=\frac{1}{6}(4^1+4^2+4^3+4^2+4^1+4^6)=700$$

を得る。

公式Ⅱ（同じものを含む円順列）

玉 P_1 が n_1 個，玉 P_2 が n_2 個，…，玉 P_m が n_m 個の合計 $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$ 個を円形に並べる並べ方の総数は

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{\substack{k=1\\ \frac{n_1(n,k)}{n},\frac{n_2(n,k)}{n},\cdots,\frac{n_m(n,k)}{n}\text{は自然数}}}^{n}\frac{(n,k)!}{\frac{n_1(n,k)}{n}!\frac{n_2(n,k)}{n}!\cdots\frac{n_m(n,k)}{n}!}\right)$$

である。

〈公式Ⅱの証明〉

同じものがある場合の円順列については，$m(m\geqq 2)$ 種類の玉がそれぞれ n_1，n_2，…，n_m 個ずつ合計 $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$ 個ある。このとき，この n 個を1列に並べる並べ方は

$\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_m!}$ 通りあるが，先の公式Ⅰの証明と同様に考える。

X を $m(m\geqq 2)$ 種類の玉がそれぞれ n_1，n_2，…，n_m 個合計 $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$ 個の順列全体の集合，

G を $\dfrac{2\pi}{n}k$ 回転を表す回転群 (ただし，$k=1$，…，$n-1$，n) とおくと，(先の公式Ⅰでは，$r=n$) $X_{\frac{2\pi}{n}k}$ の要素の個数は

$$|X_{\frac{2\pi}{n}k}|=\frac{(n,k)!}{\frac{n_1(n,k)}{n}!\frac{n_2(n,k)}{n}!\cdots\frac{n_m(n,k)}{n}!}\quad\cdots\cdots②$$

である。ただし，$\dfrac{n_i(n,\ k)}{n}$ ($i=1$，2，…，m) のすべてが自然数のとき以外は0とする。

実際，等式②については，①の議論を $r=n$ とし，n と k の最大公約数を $(n,\ k)=d$ とおき，$r=n=n'd$ とすると，$X_{\frac{2\pi}{n}k}$ の元は d 個の順列で決定され，その d 個が n' 組ある。したがって，各 $n_i(1\leqq i\leqq m)$ は d の倍数で，d 個の内訳は $\dfrac{n_1}{n'}$，$\dfrac{n_2}{n'}$，…，$\dfrac{n_m}{n'}$ 個でなければならない。よって，②は成立する。

したがって，補題により，円順列の総数 $|X/G|$ は

$$|X/G|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X_g|=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}|X_{\frac{2\pi}{r}k}|$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n,k)!}{\frac{n_1(n,k)}{n}!\frac{n_2(n,k)}{n}!\cdots\frac{n_m(n,k)}{n}!}$$

である。$m=1$ のときは自明。　(証明終)

普通，これを適用する場合は，$m\geqq 2$ であるから，和をとる場合の k は，n の正の約数に限ればよい。また，同じものを含む円順列の公式Ⅱを実際に高等学校で扱う場合には，$m=3$ 程度で表現するのが適当であろう。すなわち，

公式II′

白玉 p 個，黒玉 q 個，赤玉 r 個を円形に並べる並べ方の総数は $p+q+r=n$ とおくと，

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{\substack{k=1\\ \frac{p(n,k)}{n},\frac{q(n,k)}{n},\frac{r(n,k)}{n}\text{は自然数}}}^{n}\frac{(n,\ k)!}{\frac{p(n,\ k)}{n}!\,\frac{q(n,\ k)}{n}!\,\frac{r(n,\ k)}{n}!}\right)$$

これを当てはめれば，「はじめに」での問題は

$$\frac{1}{7}\sum_{k=1}^{7}\frac{(7,k)!}{\frac{1(7,k)}{7}!\,\frac{2(7,k)}{7}!\,\frac{4(7,k)}{7}!}=\frac{1}{7}\frac{7!}{1!2!4!}=15$$

($k=7$ のときだけの和)

と解を得る。また，白玉 2 個，赤玉 2 個，青玉 4 個の場合は，$k=4$，8 のときの和で

$$\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}\frac{(8,k)!}{\frac{2(8,k)}{8}!\,\frac{2(8,k)}{8}!\,\frac{4(8,k)}{8}!}=\frac{1}{8}\left(\frac{4!}{1!1!2!}+\frac{8!}{2!2!4!}\right)=54$$

§4. 重複数珠順列および同じものを含む数珠順列

次に，数珠順列について考える。円順列の場合と同様にして，有限集合 X として順列全体の集合，有限群 G として回転と線対称を含む群をとり，Burnside's Lemma を適用する。まず，n 種類の中から重複を許して r 個選び数珠を作るときの重複数珠順列を考える。有限群 G を次のようにおく。正 r 角形 $A_1A_2\cdots A_r$ の r 個の頂点上に数字を並べる。また，その中心を O とする。

$r=2l-1\ (l\geqq 1)$ のとき，i 回転 $\sigma_i\ (1\leqq i\leqq r)$ に，直線 $A_iO\ (1\leqq i\leqq r)$ に関する対称移動 (τ_i) を加えた $2r$ 個の元の集合を G とする。

$$G=\{\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_r,\ \tau_1,\ \cdots,\ \tau_r\}$$

$\sigma_i\sigma_j=\sigma_{i+j}$ などが成立するから，集合 G は群である。重複円順列の議論より，$|X_{\sigma_k}|=n^{(r,k)}$ である。また，$|X_{\tau_k}|=n^l$ より，重複数珠順列の総数 $|X/G|$ は

$$|X/G|=\frac{1}{2r}\left(\sum_{k=1}^{r}n^{(r,k)}+\underbrace{n^l+n^l+\cdots+n^l}_{r\text{個}}\right)$$
$$=\frac{1}{2r}\left(\sum_{k=1}^{r}n^{(r,k)}+r\cdot n^{\frac{r+1}{2}}\right)$$

$r=2l\ (l\geqq 1)$ のとき，先と同様に，$\dfrac{2\pi}{r}i$ 回転 σ_i $(1\leqq i\leqq r)$ に，対称移動を加える。r は偶数であるから，2 種類の対称移動がある。

直線 $A_iO\ (1\leqq i\leqq r=2l)$ に関する対称移動 (τ_i) については，$\tau_1=\tau_{l+1}$，…，$\tau_l=\tau_{2l}$，

辺 A_1A_2 の中点を M_1，辺 A_2A_3 の中点を M_2，…，辺 $A_{2l}A_1$ の中点を M_{2l} とおくとき，直線 OM_i に関する対称移動を ρ_i とすると，$\rho_1=\rho_{l+1}$，…，$\rho_l=\rho_{2l}$ および，$\tau_i=\sigma_{i-1}\tau_1\sigma_{-i+1}$，$\rho_i=\sigma_{i-1}\rho_1\sigma_{-i+1}\ (1\leqq i\leqq r)$ などより，集合 $G=\{\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_r,\ \tau_1,\ \cdots,\ \tau_l,\ \rho_1,\ \cdots,\ \rho_l\}$ は群である。したがって，

$$|X/G|=\frac{1}{2r}\left(\sum_{k=1}^{r}n^{(r,k)}+l\cdot n^{l+1}+l\cdot n^l\right)$$
$$=\frac{1}{2r}\left(\sum_{k=1}^{r}n^{(r,k)}+\frac{r}{2}n^{\frac{r}{2}+1}+\frac{r}{2}n^{\frac{r}{2}}\right)$$

以上により，

公式III（重複数珠順列）

n 種類の中から重複を許して r 個で数珠を作るとき，その総数は

r が奇数のとき，$\dfrac{1}{2r}\left(\sum_{k=1}^{r}n^{(r,k)}+r\cdot n^{\frac{r+1}{2}}\right)$

r が偶数のとき，$\dfrac{1}{2r}\left(\sum_{k=1}^{r}n^{(r,k)}+\frac{r}{2}n^{\frac{r}{2}+1}+\frac{r}{2}n^{\frac{r}{2}}\right)$

次に，同じものを含む場合の数珠順列であるが，「玉 P_1 が n_1 個，玉 P_2 が n_2 個，…，玉 P_m が n_m 個の合計 $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$ 個の数珠順列の総数」については，n_i の偶数，奇数によって，線対称になる順列の個数が異なることに注意すると，次の式で得られる。

公式IV（同じものを含む数珠順列）

玉 P_1 が n_1 個，玉 P_2 が n_2 個，…，玉 P_m が n_m 個の合計 $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$ 個で数珠を作るとき，その総数は

(1) n_1，n_2，…，n_m がすべて偶数のとき，

$$\frac{1}{2n}\left(\sum_{\substack{k=1\\ \frac{n_1(n,k)}{n},\frac{n_2(n,k)}{n},\dots,\frac{n_m(n,k)}{n}\text{は自然数}}}^{n}\frac{(n,k)!}{\frac{n_1(n,k)}{n}!\,\frac{n_2(n,k)}{n}!\cdots\frac{n_m(n,k)}{n}!}+\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\frac{n-2}{2}!}{\frac{n_1}{2}!\,\frac{n_2}{2}!\cdots\frac{n_i-2}{2}!\cdots\frac{n_m}{2}!}+\frac{n}{2}\frac{\frac{n}{2}!}{\frac{n_1}{2}!\,\frac{n_2}{2}!\cdots\frac{n_m}{2}!}\right)$$

(2) n_1 が奇数で，残り n_2,…, n_m が偶数のとき，

$$\frac{1}{2n}\left(\sum_{\substack{k=1\\ \frac{n_1(n,k)}{n},\frac{n_2(n,k)}{n},\dots,\frac{n_m(n,k)}{n}\text{は自然数}}}^{n}\frac{(n,k)!}{\frac{n_1(n,k)}{n}!\,\frac{n_2(n,k)}{n}!\cdots\frac{n_m(n,k)}{n}!}+n\cdot\frac{\frac{n-1}{2}!}{\frac{n_1-1}{2}!\cdot\frac{n_2}{2}!\cdots\frac{n_m}{2}!}\right)$$

(3) n_1, n_2 が奇数で，残り n_3,…, n_m が偶数のとき，

$$\frac{1}{2n}\left(\sum_{\substack{k=1\\ \frac{n_1(n,k)}{n},\frac{n_2(n,k)}{n},\cdots,\frac{n_m(n,k)}{n}\text{は自然数}}}^{n}\frac{(n,k)!}{\frac{n_1(n,k)}{n}!\frac{n_2(n,k)}{n}!\cdots\frac{n_m(n,k)}{n}!}+\frac{n}{2}\cdot 2\cdot\frac{\frac{n-2}{2}!}{\frac{n_1-1}{2}!\frac{n_2-1}{2}!\frac{n_3}{2}!\cdots\frac{n_m}{2}!}\right)$$

(4) n_1, n_2, $\cdots$, n_t が奇数で,

$n_{t+1}, n_{t+2}, \cdots, n_m$ が偶数のとき, $(3 \leqq t \leqq m)$

$$\frac{1}{2n}\left(\sum_{\substack{k=1\\ \frac{n_1(n,k)}{n},\frac{n_2(n,k)}{n},\cdots,\frac{n_m(n,k)}{n}\text{は自然数}}}^{n}\frac{(n,k)!}{\frac{n_1(n,k)}{n}!\frac{n_2(n,k)}{n}!\cdots\frac{n_m(n,k)}{n}!}\right)$$

例えば, $m=3$, 奇数が1個の場合は, 次のようになる。白玉 p 個, 黒玉 q 個, 赤玉 r 個で数珠を作るときの総数は, p だけ奇数, $p+q+r=n$ とすると,

$$\frac{1}{2n}\left(\sum_{\substack{k=1\\ \frac{p(n,k)}{n},\frac{q(n,k)}{n},\frac{r(n,k)}{n}\text{は自然数}}}^{n}\frac{(n,k)!}{\frac{p(n,k)}{n}!\frac{q(n,k)}{n}!\frac{r(n,k)}{n}!}+n\cdot\frac{\frac{n-1}{2}!}{\frac{p-1}{2}!\frac{q}{2}!\frac{r}{2}!}\right)$$

である。具体的には, 白玉3個, 黒玉2個, 赤玉2個のときは,

$$\frac{1}{14}\left(\sum_{\substack{k=1\\ \frac{3(7,k)}{7},\frac{2(7,k)}{7}\text{は自然数}}}^{7}\frac{(7,k)!}{\frac{3(7,k)}{7}!\frac{2(7,k)}{7}!\frac{2(7,k)}{7}!}+7\cdot\frac{3!}{1!1!1!}\right)=18$$

通りである。

§5. おわりに

重複円順列, 重複数珠順列などは問題集で, よく見かける問題であるが,「公式」という形での記述を見たことがなかった。生徒に質問されたこともあり, 長年, 気になっていた。「公式」というには複雑すぎるが, 一応アルゴリズムはできたと思う。

今後は, 証明の過程を高校生向けに表現の変更を考えているが, 実質的には群論であり, 抽象的な議論を長々とせねばならず, 数学嫌いを増やすだけになりそうで, 今現在頓挫している。

《参考文献》

〔1〕 教科書傍用問題集, 改訂版「4STEP I＋A」 数研出版

〔2〕 西山豊,『数学を楽しむ/バーンサイドの補題』, 理系への数学2007年4月号 現代数学社

(愛知県立五条高等学校)

表1

1	2	$\cdots$	k_0	k_0+1	$\cdots$	$2k_0$	$\cdots$	qk_0	qk_0+1	$\cdots$	$r=qk_0+k_1$	1	$\cdots$	k_0
				1	$\cdots$	k_0		$(q-1)k_0$	$(q-1)k_0+1$	$\cdots$	$(q-1)k_0+k_1$	$(q-1)k_0+k_1+1$	$\cdots$	qk_0+k_1

#

表2

1	2	$\cdots$	k_0-k_1	k_0-k_1+1	$\cdots$	k_0-1	k_0
k_1+1	k_1+2	$\cdots$	k_0	1	$\cdots$	k_1-1	k_1

¥

表3

1	$\cdots$	k_1-1	k_1	k_1+1	k_1+2	$\cdots$	k_0
k_0-k_1+1	$\cdots$	k_0-1	k_0	1	2	$\cdots$	k_0-k_1

表4

1	$\cdots$	k_1-1	k_1	k_1+1	k_1+2	$\cdots$	k_0	1	$\cdots$	k_1-1	k_1
				1	2	$\cdots$	k_0-k_1	k_0-k_1+1	$\cdots$	k_0-1	k_0

表5

1	2	$\cdots$	k_1	k_1+1	$\cdots$	$2k_1$	$\cdots$	q_1k_1	q_1k_1+1	$\cdots$	$k_0=q_1k_1+k_2$	1	$\cdots$	k_1
				1	$\cdots$	k_1		$(q_1-1)k_1$	$(q_1-1)k_1+1$	$\cdots$	$(q_1-1)k_1+k_2$	$(q_1-1)k_1+k_2+1$	$\cdots$	$q_1k_1+k_2$