弓形・貝形・だるま形・三日月形の方程式について

佐々木　正敏

§1. はじめに

高等学校では円の方程式を学習するが，円と直線，あるいは円と円とで囲まれた図形の方程式を学習することはない。そこで，それらについても公式化したい。あわせてその構造について考察し，一般の閉曲線の方程式表示につなげたい。

§2. 弓形・貝形・だるま形・三日月形の定義

円弧とその両端を結ぶ弦によってできる図形を弓形と定義するが，交わる2円に対して他を次のように定義する。貝形：異なる円の内側の弧同士で囲まれる図形。だるま形：異なる円の外側の弧同士で囲まれる図形。三日月形：異なる円の外側の弧と内側の弧で囲まれる図形。交わる2円に対して2つできる。実際の三日月では欠けている部分の弧は楕円の半弧であるが，ここでは2つの円弧で囲まれた図形と定義する。

§3. 貝形とだるま形の方程式

交わる2円の方程式を

$f(x,\ y)=x^2+y^2+lx+my+n=0$,

$g(x,\ y)=x^2+y^2+ax+by+c=0$ とするとき

(以下，$f(x,\ y)$ を f，$g(x,\ y)$ を g と表記する)，

$f+g+|f-g|=0$ を作ると貝形の方程式が，

$f+g-|f-g|=0$ を作るとだるま形の方程式が得られる。前者を f, g の貝形結合，後者をだるま形結合と呼ぶ。

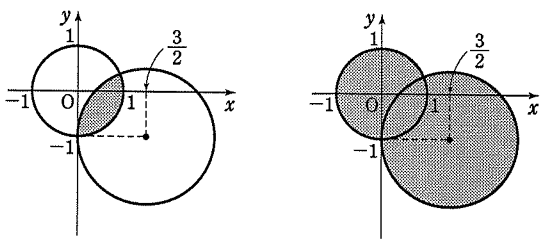
〔例1〕 貝形，だるま形の方程式

交わる2円を $f=x^2+y^2-1=0$,

$g=x^2+y^2-3x+2y+1=0$

とするとき，この2円で囲まれる貝形(図1)左の方程式は

$$(x^2+y^2-1)+(x^2+y^2-3x+2y+1)$$
$$+|(x^2+y^2-1)-(x^2+y^2-3x+2y+1)|=0$$



(図1)

で与えられる。整理して

$$x^2+y^2-\frac{3}{2}x+y+\left|\frac{3}{2}x-y-1\right|=0$$

だるま形(図1)右の方程式は次の通り。

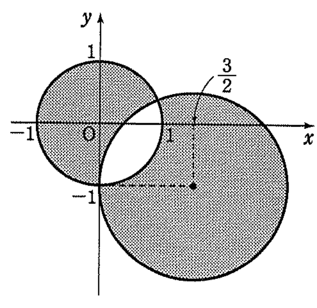
$$(x^2+y^2-1)+(x^2+y^2-3x+2y+1)$$
$$-|(x^2+y^2-1)-(x^2+y^2-3x+2y+1)|=0$$

整理して　$x^2+y^2-\frac{3}{2}x+y-\left|\frac{3}{2}x-y-1\right|=0$

§4. 三日月形の方程式

交わる2円の方程式を§3と同様にとる。このとき，$|f+g|+f-g=0$ を作ると，$f=0$ を外側円弧，$g=0$ を内側円弧とする三日月形の方程式が得られる。$|f+g|+(-f+g)=0$ を作ると，$f=0$ を内側円弧，$g=0$ を外側円弧とする三日月形の方程式になる。$|f+g|+f-g=0$ の形の結合を三日月形結合と呼ぶ。

〔例2〕 三日月形の方程式



(図2)

交わる２円を $f=x^2+y^2-1=0$,

$$g=x^2+y^2-3x+2y+1=0$$

とするとき，(図２) の小さい方の三日月形は $f=0$ を外側円弧，$g=0$ を内側円弧とする三日月形であるから，その方程式は次の通り。

$$|(x^2+y^2-1)+(x^2+y^2-3x+2y+1)|$$
$$+(x^2+y^2-1)-(x^2+y^2-3x+2y+1)=0$$

整理して

$$\left|x^2+y^2-\frac{3}{2}x+y\right|+\frac{3}{2}x-y-1=0$$

大きい方の三日月形は $f=0$ を内側円弧，$g=0$ を外側円弧とするから，その方程式は f，g を入れ替えて

$$|(x^2+y^2-1)+(x^2+y^2-3x+2y+1)|$$
$$+(x^2+y^2-3x+2y+1)-(x^2+y^2-1)=0$$

整理して

$$\left|x^2+y^2-\frac{3}{2}x+y\right|-\frac{3}{2}x+y+1=0$$

§5. 弓形の方程式

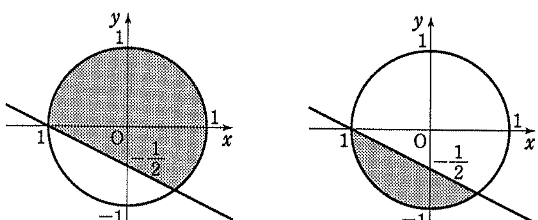
円弧を表す円の方程式を

$f=x^2+y^2+lx+my+n=0$,

弦を表す直線の方程式を $g=px+qy+r=0$ とするとき，$|f+g|+f-g=0$ を作ると１次式 g の正領域にある弓形の方程式が得られる。１次式 g の負領域側の弓形を表すには，g を $-g$ で置き換えて，$|f-g|+f+g=0$ を作ればよい。

弓形は直線を半径無限大の円と考えて，２円を三日月形結合したものと考えることもできよう。

〔例３〕　弓形の方程式



(図３)

円弧として単位円 $f=x^2+y^2-1=0$，弦として直線 $g=x+2y+1=0$ を考えると，(図３) 左の優弧弓形は，１次式 $x+2y+1$ の正領域にあるから

$$|(x^2+y^2-1)+(x+2y+1)|$$
$$+(x^2+y^2-1)-(x+2y+1)=0$$

で与えられる。すなわち

$$|x^2+y^2+x+2y|+x^2+y^2-x-2y-2=0$$

一方，右の劣弧弓形の方程式は，弓形が１次式 $x+2y+1$ の負領域にあることに留意して，

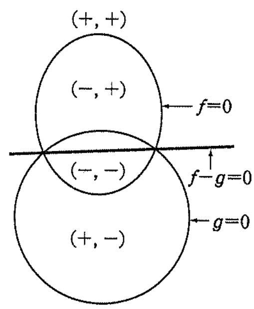
$$|(x^2+y^2-1)-(x+2y+1)|$$
$$+(x^2+y^2-1)+(x+2y+1)=0$$

で与えられる。整理して

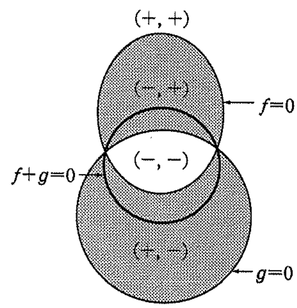
$$|x^2+y^2-x-2y-2|+x^2+y^2+x+2y=0$$

§6. 交わる２円で囲まれる図形の方程式

平面は交わる２円 $f=0$，$g=0$ によって４つの領域に分けられるが，f，g の正領域をそれぞれの円の外部とするとき，各領域での f，g の符号を調べると図４，図５のようになる。かっこ内の左側が f の符号，右側が g の符号を表す。例えば (＋，－) は $f>0$ かつ $g<0$ である領域を表す。このとき



(図４)



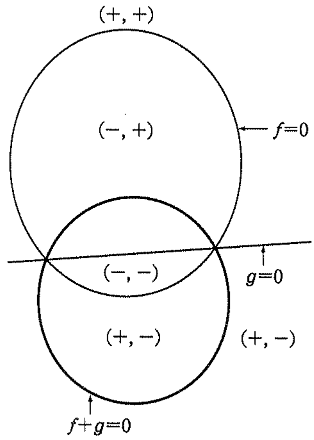
(図５)

$f-g=0$ は２円の交点を通る直線を表すが，１次式 $f-g$ は (＋，－) と (－，＋) の領域では０にならないから，(＋，＋) と (－，－) の領域に現れる (図４太線の直線)。１次式 $f-g$ の正領域は (＋，－) の領域を，負領域は (－，＋) の領域を含むから，直線の下側が正領域に，上側が負領域になる。したがって，方程式 $f+g+|f-g|=0$ は，直線の下側 (正領域) では $f=0$，上側 (負領域) では $g=0$ になるから，貝形を表す。また，$f+g-|f-g|=0$ を作ると，直線の下側 (正領域) で $g=0$，上側 (負領域) で $f=0$ になるから，だるま形を表すことがわかる。

一方，$f+g=0$ は２円の交点を通る円を表すが，(＋，＋) と (－，－) の領域には現れないから，(＋，－) と (－，＋) の領域 (図５の網掛け部分) に現れる (図５の太線の円)。またその負領域に (－，－) の領域を含むから，この円の内側が $f+g$ の負領域，外側が正領域になる。したがって，方程式 $|f+g|+f-g=0$ は円 $f+g=0$ の外側で $f=0$，内側で $g=0$ になるから，$f=0$ を外側円弧，$g=0$ を内側円弧とする三日月形を表すことが分かる。

f と g を入れ替えた方程式 $|f+g|+g-f=0$ を作ると，外側と内側が入れ替わった三日月形が得られる。

ここで，$g=0$ として円の代わりに直線を考える。1次式 g の正領域を $g=0$ の上側，負領域を下側とすると，4領域の符号は（図6）の通り。

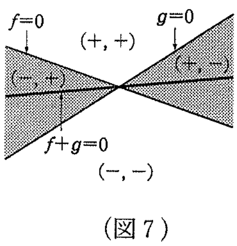


（図6）

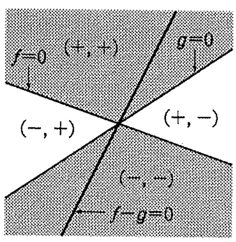
太線の円は $f+g=0$ を表す。$f+g$ の正領域は（＋，＋）を含むから，方程式 $|f+g|+f-g=0$ は太線の円の外側で $f=0$ を，内側で $g=0$ を表す。したがって弓形を表す。この方程式では g の正領域に弓形が現れるから，$|f-g|+f+g=0$ を作れば，反対側の弓形の方程式が得られる。

§7. 折れ線の方程式と一般化

交わる2直線 $f=0$，$g=0$ を考える。いずれも直線の上側を1次式 f，g の正領域とする。三日月形結合 $|f+g|+f-g=0$ を考えると，$f+g=0$ は



（図7）



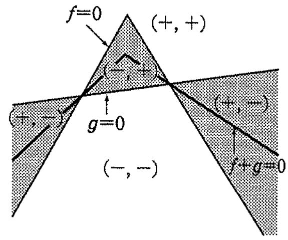
（図8）

（＋，－）と（－，＋）の領域（図7の網掛け部分）に現れるから，$f+g$ の正領域［直線の上側（＋，＋）の領域を含む］では $f=0$，負領域では $g=0$ を表す。したがって，逆くの字形の折れ線になる。

$|f+g|+(-f+g)=0$ なら，くの字形の折れ線が得られる。

貝形結合 $f+g+|f-g|=0$ の場合 $f-g$ の正領域は，（＋，－）の領域を含むから，直線 $f-g=0$ の右側になる。（図8の網掛け部分は直線 $f-g=0$ の現れる領域）したがって，への字形の折れ線になる。だるま形結合 $f+g-|f-g|=0$ ならV字形の折れ線になる。折れ線の方程式では結合の際，正領域，負領域を変化させないように f，g に正の実数をかけて結合してもかまわない。

次に，（図9）のような折れ線 $f=0$ と直線 $g=0$ の結合を考える。いずれも f，g の正領域をグラフの上側とする。



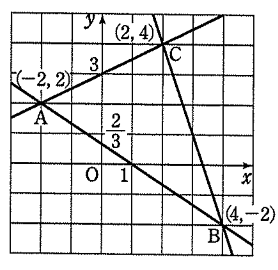
（図9）

$|f+g|+f-g=0$ を作ると，$f+g=0$ は（図9）の網掛け部分に現れるから，$f+g$ の正領域では $f=0$，負領域では $g=0$ になる。したがって三角形を表すことがわかる。

これまで2つの円や円と直線に対して結合を考えたが，円の代わりに円と同相な閉曲線，直線の代わりに折れ線や放物線などを用いても同じように曲線で囲まれた図形の方程式を作ることができる。

〔例4〕　**三角形の方程式**

直線CBの方程式は $f=3x+y-10=0$，直線ACの方程式は $g=x-2y+6=0$，直線の上側は1次式 $3x+y-10$，$-(x-2y+6)$ の正領域であるから，折れ線ACBの方程式は，f，g の貝形結合を作って



（図10）

$$2(3x+y-10)+\{-(x-2y+6)\}$$
$$+|2(3x+y-10)-\{-(x-2y+6)\}|=0$$

整理して $5x+4y-26+7|x-2|=0$ となる。

直線ABの方程式は $2x+3y-2=0$ で，上側が $2x+3y-2$ の正領域であるから，三角形ABCの方程式は $5x+4y-26+7|x-2|$ と $2x+3y-2$ を三日月形結合して得られる。

$$|(5x+4y-26+7|x-2|)+(2x+3y-2)| \\ +(5x+4y-26+7|x-2|)-(2x+3y-2)=0$$

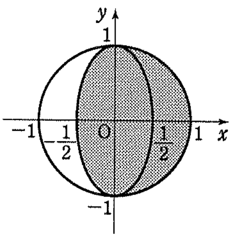
すなわち

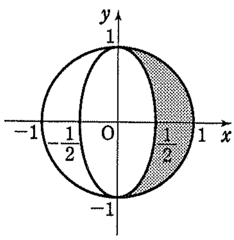
$$7|x+y-4+|x-2||+7|x-2|+3x+y-24=0$$

〔例5〕 月の形

半円と半楕円弧で囲まれた図形(実際の月の形)を表そう。半円と楕円の結合を考えればよい。

外側周として単位円 $f=x^2+y^2-1=0$ を，欠けている半楕円弧として，たとえば $g=4x^2+y^2-1=0$ を利用する。





(図11)

単位円の右半分を表す半円の方程式は，単位円の $x\geqq0$ の部分(x の正領域)であるから x^2+y^2-1 と x を三日月形結合して，

$$|(x^2+y^2-1)+x|+(x^2+y^2-1)-x=0$$

で得られる。整理して

$$|x^2+y^2+x-1|+x^2+y^2-x-1=0$$

したがって，(図11)左の十日の月の形の方程式は，$|x^2+y^2+x-1|+x^2+y^2-x-1$ と $4x^2+y^2-1$ をだるま形結合すればよい。

$$(|x^2+y^2+x-1|+x^2+y^2-x-1)+(4x^2+y^2-1) \\ -|(|x^2+y^2+x-1|+x^2+y^2-x-1)-(4x^2+y^2-1)| \\ =0$$

整理して

$$|x^2+y^2+x-1|+5x^2+2y^2-x-2 \\ -||x^2+y^2+x-1|-3x^2-x|=0$$

右図の三日月のほうであれば三日月形結合して

$$||x^2+y^2+x-1|+5x^2+2y^2-x-2| \\ +|x^2+y^2+x-1|-3x^2-x=0$$

になる。

(東京都立日野台高等学校)