「隣接４項間漸化式の一般項について」の別表現

森（もり）　靖之（やすゆき）

§1. はじめに

数研通信 No 65 に，久末正樹先生の『隣接４項間漸化式の一般項について』と石野吉宏先生の『漸化式を目で見る』という論文があった。『漸化式を目で見る』には，$a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}\ (q \neq 0)$ という隣接３項間漸化式を，

$$\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1} \\ a_n=a_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

と変形するアイデアがあり，このアイデアで以前筆者は隣接４項間漸化式の一般項を表現したことがあった。ちょうど同時にこの２つの論文が掲載されたのを目の当たりにしたので，私の研究結果をこの数研通信にすぐに投稿せねば，という衝動に駆られた。

本来，数研通信には，基本的に未発表な論文を掲載すべきであるが，上記の素晴らしい２つの論文のささやかではあるが重要な〝おまけ〟としてこの結果をここに紹介したい。

§2. 隣接４項間漸化式の表現

隣接４項間漸化式

$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n+ra_{n-1}\ (r \neq 0)$ は，

$$\begin{cases} a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n+ra_{n-1} \\ a_{n+1}=a_{n+1} \\ a_n \quad = \quad a_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

と考えて，$\begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値を α，β，γ とすれば，次のように表現できる。

(i)　α，β，γ が異なるとき，

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

(ii)　$\alpha \neq \beta = \gamma$ のとき，

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dfrac{\beta^2}{\alpha-\beta} \\ 0 & \beta & -\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta} \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dfrac{\beta^2}{\alpha-\beta} \\ 0 & \beta & -\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta} \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & \dfrac{\beta^2(\alpha^n-\beta^n)}{(\alpha-\beta)^2} \\ 0 & \beta^n & -\dfrac{n\alpha\beta^n}{\alpha-\beta} \\ 0 & 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

(iii)　$\alpha=\beta=\gamma$ のとき，

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 3\alpha & -4\alpha^2 \\ 0 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 3\alpha & -4\alpha^2 \\ 0 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \alpha^n & \dfrac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2} & -n(n-2)\alpha^{n-1} \\ 0 & (2n+1)\alpha^n & -4n\alpha^{n+1} \\ 0 & n\alpha^{n-1} & -(2n-1)\alpha^n \end{pmatrix}$$

さらに同様な方法でこれ以外に５通りの表し方がある。

別法 1

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 2\alpha & \alpha^3 \\ 1 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 2\alpha & \alpha^3 \\ 1 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}^n$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha^n & \frac{n(n+1)}{2}\alpha^{n-2} & \frac{(n-1)n}{2}\alpha^n \\ 0 & (n+1)\alpha^n & n\alpha^{n+2} \\ 0 & -n\alpha^{n-2} & -(n-1)\alpha^n \end{pmatrix}$$

別法 2

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & -4\alpha^2 & 3\alpha \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & -4\alpha^2 & 3\alpha \end{pmatrix}^n$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha^n & n(2-n)\alpha^{n-1} & \frac{(n-1)n}{2}\alpha^{n-2} \\ 0 & (1-2n)\alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & -4n\alpha^{n+1} & (2n+1)\alpha^n \end{pmatrix}$$

別法 3

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & -3 & \alpha \\ 0 & 3\alpha & -\alpha^2 \\ 0 & 4 & -\alpha \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & -3 & \alpha \\ 0 & 3\alpha & -\alpha^2 \\ 0 & 4 & -\alpha \end{pmatrix}^n$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha^n & -n(n+2)\alpha^{n-1} & \frac{n(n+1)}{2}\alpha^n \\ 0 & (2n+1)\alpha^n & -n\alpha^{n+1} \\ 0 & 4n\alpha^{n-1} & (1-2n)\alpha^n \end{pmatrix}$$

別法 4

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & \alpha^3 & 2\alpha \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & \alpha^3 & 2\alpha \end{pmatrix}^n$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha^n & \frac{n(n-1)}{2}\alpha^n & \frac{n(n+1)}{2}\alpha^{n-2} \\ 0 & (1-n)\alpha^n & -n\alpha^{n-2} \\ 0 & n\alpha^{n+2} & (n+1)\alpha^n \end{pmatrix}$$

別法 5

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & -3 \\ 0 & -\alpha & 4 \\ 0 & -\alpha^2 & 3\alpha \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & -3 \\ 0 & -\alpha & 4 \\ 0 & -\alpha^2 & 3\alpha \end{pmatrix}^n$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha^n & \frac{n(n+1)}{2}\alpha^n & -n(n+2)\alpha^{n-1} \\ 0 & (1-2n)\alpha^n & 4n\alpha^{n-1} \\ 0 & -n\alpha^{n+1} & (2n+1)\alpha^n \end{pmatrix}$$

§3. さいごに

本稿では触れていないが，漸化式を行列を使って表現するよいところは，行列の固有値と漸化式の特性方程式の解が実は同じであることが理解しやすいことである。このあたりの研究は参考文献を参照されたい。

《参考文献》

〔1〕 久末正樹「隣接 4 項間漸化式の一般項について」数研通信 No 65

〔2〕 石野吉宏「漸化式を目で見る」数研通信 No 65

〔3〕 森靖之「行列の n 乗と漸化式」愛数 45 号 愛知県数学教育研究会高等学校部会 2007

(愛知県東海高等学校)