授業に役立つ小ネタ集

久米（くめ） 秀夫（ひでお）

§0. はじめに

普段何気なく使う定理や公式に対する素朴な疑問を考えたり，定理や公式を覚えるのに，ニヤっと笑える味付けをしたり，公式名をギャグったりすることで，授業が豊かになることがあります。

すでに知られていることもあるかもしれませんが，オリジナル(のつもり)ないしはそれに近いもの(参考書の解説などでもあまり触れられていないもの)を何点か紹介しようと思います。

§1. 素朴な疑問

●直線 $ax+by+c=0$ の法線ベクトル $\vec{n}=(a,\ b)$ はどちらを向いているか？

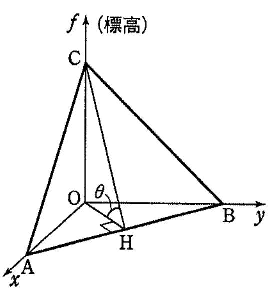
$f(x,\ y)=ax+by+c$ の正領域を向いています。

平面の法線ベクトルもそうですが，どちらを向いているかわからないと不安なことがありますよね？2直線のなす角も法線ベクトルで求める場合，求めてみないと鋭角か鈍角かわからないとか…。

●点と直線の距離の公式って難し過ぎませんか？

新しい見方をしてみましょう。

$f(x,\ y)=ax+by+c$ とおきます。$f(x,\ y)=0$ は海岸線を表し，直線 $f(x,\ y)=2$ は陸側で海岸線に平行な標高2の等高線と考えましょう。そうすると，直線 $f(x,\ y)=-1$ は海側の深さ1の等高線と考えることができます。すなわち，点 $(x_0,\ y_0)$ を通る等高線の標高(深さ)は $f(x_0,\ y_0)$ となります。



すぐわかるように，海岸線からの距離は標高(の絶対値)と比例します。したがって比例定数を求めることで，距離の公式が得られます。点 $(x_0,\ y_0)$ を通る等高線の標高は $f(x_0,\ y_0)$ ですから，比例定数は上の図を参考に，$\tan\theta$ を求めればその逆数が比例定数となります。

$c>0$, $ab\neq 0$ とすれば

$\mathrm{A}\left(-\dfrac{c}{a},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\ -\dfrac{c}{b}\right)$, $\mathrm{OC}=f(0,\ 0)=c$ であるから $\mathrm{OH}=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ となります。

したがって，$\tan\theta=\dfrac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OH}}=\sqrt{a^2+b^2}$

すなわち $\dfrac{(\text{標高})}{\sqrt{a^2+b^2}}$ が海岸線からの距離となります。$c\leqq 0$ の場合や $a=0$ または $b=0$ の場合も同様です。

点 $(x_0,\ y_0)$ の標高は $f(x_0,\ y_0)$ ですから，点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $f(x,\ y)=ax+by+c=0$ (海岸線)の距離 d は

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

で求めることができます。

なお，2つの点のうちどちらが直線に近いか遠いかは標高の大小のみで判定できます。

§2. 1次変換のアナロジー

2次の1次変換は xy 平面を空間のどの角度から眺めるか，というアナロジックな考え方でその特徴をとらえることができます。(ただし，実際の見え方は遠近法の関係で厳密ではありませんが…)

1次変換 $f:\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は

$\Delta=ad-bc>0$ のとき，xy 平面を上側から見ている

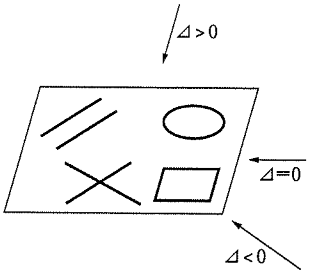
$\Delta=ad-bc<0$ のとき，xy 平面を下側から見ている(裏返し)

$\Delta=ad-bc=0$ のとき，xy 平面を真横から見ている

と考えることができます。

したがって，$\Delta=ad-bc\neq 0$ ならば，平行線は平

行線に移り，四角形は四角形に移るので，平行四辺形は平行四辺形に移ります。



また，閉曲線（例えば円）は閉曲線（だ円）に移ることも自明ですね。交わる2直線が交わる2直線に移ることも同様です。

$\Delta=ad-bc<0$ のときは，平面を下側から見ることになるので（目を動かさなければ裏返しになる），四角形OABC（Oは座標の原点）は四角形OC′B′A′に移ります。

また，$\Delta=ad-bc=0$ のときは，xy 平面を真横から見ることになるので，平面全体が1つの直線に移ることも明らかです。結果として，平面上の閉曲線（例えば円）は平面全体が移る直線上の一部（線分）に移ります。

見る方向がたまたま直線の方向と一致するときは，直線が点になることもあり，特殊なケースも自然に納得できます。

§3. メネラウスの定理について

「キツネ発見！」

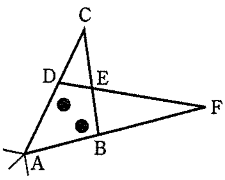
図形の中に「キツネ」を見つければメネラウスの定理が使えます。

「どの三角形をまわるか」

例えば三角形BEFをまわると

$$\frac{AF}{BA}\times\frac{DE}{FD}\times\frac{CB}{EC}=1$$

が成り立ちます。

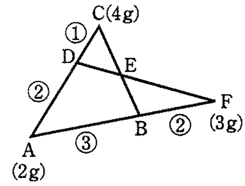


「錘（おもり）の定理」

AB：BF＝3：2 のとき，Bを支点として，点A，Fに錘を垂らして釣り合いの状態にするには

点Aに2g，点Fに3gの分銅をつければよい。

（力のモーメント）



次に，Dを支点として釣り合うためには点Cに4gの分銅をつければよい。これで準備完了。

Bには合計5gの重量，Cには4gの重量がかかっているので，Eを支点として釣り合うためには

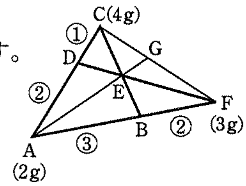
CE：EB＝5：4

であればよいことになります。

同様に，DE：EF＝1：2

であることがわかります。

さらに，AEの延長とCFの交点をGとすると，同様に考えて



CG：GF＝3：4，AE：EG＝7：2

であることがわかります。

§4. 最後に

ギャグを2つ

● 相加平均・相乗平均の関係

これを使いこなすには練習と経験が必要ですが，使ったあと

「そうか！　そうしよう！」

● コーシー・シュワルツの不等式

定理名を覚える必要は特にないでしょうが，説明したときに覚えてもらうために

「つるはしの不等式」（しはるつの不等式）

関西人なら「鶴橋」でしょうか。

（大阪府　大阪国際大和田高等学校）