二項係数の公式について

柳田（やなぎだ）　五夫（いつお）

§0. はじめに

多項式のラプソディー ([1]) には，二項係数に関する次のような公式が載せられている。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\frac{1}{18}\pi^2$$

興味深い式であるので証明を試みてみた。さらに，p を 3 以上の自然数として，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ がどのような式になるのかについても調べてみた。

準備として，次の記号と，べき級数に関することを述べておく。

1° m を自然数とするとき，!! は

$(2m)!!=2m\cdot 2(m-1)\cdots\cdots 2,$

$(2m+1)!!=(2m+1)\cdot(2m-1)\cdots\cdots 1$

を表す。

2° べき級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ ……①

が $|x|<r$ のとき収束，$|x|>r$ のとき発散するとき，r をべき級数①の収束半径という。

3° べき級数①の収束半径を r とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ が有限の極限値または ∞ に発散すれば

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

4° べき級数はその収束域内の任意の閉区間で何回でも項別に微分，積分することができる。

§1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ の値

まず $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ の値を求めることにする。

$$\frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{\{(2n)!!\}^2}{2^{2n}}\cdot\frac{1}{(2n)!!(2n-1)!!}$$

$$=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{2^{2n}}$$

と変形できるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{2^{2n}}\quad\cdots\cdots②$$

と表せる。

ここで母関数 $\displaystyle f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}x^{2k+1}\ (|x|<1)$ を考えると②の右辺は $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の式の中に現れるので，$f(x)$ の微分方程式を作り，$f(x)$ を求めてみる。

$$f'(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}x^{2k}\quad\cdots\cdots③$$

$$=1+2x^2+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}x^{2k}$$

$$=1+2x^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+2)!!}{(2k+1)!!}x^{2k+2}\quad\cdots\cdots④$$

③から

$$x^2f'(x)=x^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}x^{2k+2}\quad\cdots\cdots⑤$$

④−⑤から

$$(1-x^2)f'(x)$$

$$=1+x^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{(2k+2)!!}{(2k+1)!!}-\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right\}x^{2k+2}$$

$$\frac{(2k+2)!!}{(2k+1)!!}-\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}$$

$$=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\{(2k+2)-(2k+1)\}$$

$$=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$$

より

$$(1-x^2)f'(x)=1+x^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}x^{2k+2}$$

$$=1+x^2+x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}x^{2k+1}$$

$$=1+x^2+x\{f(x)-x\}$$

$$\therefore\quad (1-x^2)f'(x)-xf(x)=1$$

両辺を $\sqrt{1-x^2}$ で割ると

$$\sqrt{1-x^2}f'(x)-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\{\sqrt{1-x^2}f(x)\}'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left[\sqrt{1-x^2}f(x)\right]_0^x$$

$$=\sqrt{1-x^2}f(x)-f(0)$$

$\sqrt{1-x^2}f(x)=\sin^{-1}x$ から

$$f(x)=\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \cdots\cdots⑥$$

⑥の両辺を x で微分すると

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2}-\sin^{-1}x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$=\frac{1+\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \qquad \cdots\cdots⑦$$

③，⑦から

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}x^{2k}=\frac{1+\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

ここで $x=\frac{1}{2}$ とおくと

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\cdot\frac{1}{2^{2k}}=\frac{1+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\cdot\frac{1}{2^{2k}}=\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$$

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{{}_{2n}C_n}=\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$

⑥から $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}x^{2k+1}=\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

ここで $x=\frac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\cdot\frac{1}{2^{2k}}=\frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

すなわち次の式を得る。

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k+1)!}=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi \qquad \cdots\cdots⑧$$

§2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,{}_{2n}C_n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\,{}_{2n}C_n}$ の値

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,{}_{2n}C_n}$ の値は⑧から求められる。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,{}_{2n}C_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\{(n-1)!\}^2}{n\cdot 2n(2n-1)!}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{(n-1)!\}^2}{(2n-1)!}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k+1)!}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi \quad (\because\ ⑧)$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\,{}_{2n}C_n}$ の値は⑥の式を積分した式を利用して求められる。

⑥から

$$\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}x^{2k+1}$$

の両辺を 0 から x まで積分すると

$$\int_0^x\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}x^{2k+1}dx$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\cdot\frac{x^{2k+2}}{2k+2}\right]_0^x$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\cdot\frac{x^{2k+2}}{2k+2}$$

また $\displaystyle\int_0^x\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ であるから

$$(\sin^{-1}x)^2=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\cdot\frac{x^{2k+2}}{2k+2}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{2(n-1)\}!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n} \qquad \cdots\cdots⑨$$

ここで $x=\frac{1}{2}$ とおくと

$$\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{2(n-1)\}!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{(2n-2)!!}{2n(2n-2)!!}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}\cdot\frac{1}{2^2}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{(n-1)!\}^2}{(2n)!}\cdot\frac{1}{2^2}$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{(n-1)!\}^2}{(2n)!}=\frac{\pi^2}{18} \qquad \cdots\cdots⑩$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\,{}_{2n}C_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^2(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{(n-1)!\}^2}{(2n)!}$$

$$=\frac{\pi^2}{18} \quad (\because\ ⑩)$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\,{}_{2n}C_n}$ の値を求めるために，同様に積分してみる。⑨の両辺を x で割ってから，0 から x まで積分すると

$$\int_0^x\frac{(\sin^{-1}x)^2}{x}dx$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{2(n-1)\}!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{2n}\cdot\frac{x^{2n}}{2n}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{2(n-1)\}!!\{2(n-1)\}!!}{(2n-1)!!(2n)\{2(n-1)\}!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{(n-1)!\}^2}{n(2n)!}\cdot 2^{2(n-1)}x^{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^3(2n)!}\cdot 2^{2(n-1)}x^{2n}$$

ここで $x=\frac{1}{2}$ とおくことにより

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3{}_{2n}\mathrm{C}_n}=4\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(\sin^{-1}x)^2}{x}dx \quad \cdots\cdots⑪$$

を得るが，⑪の右辺の積分の値は求まらないようである。

§3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ (p は3以上の整数) について

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\frac{1}{18}\pi^2$ のようには $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ や $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ 等は求まりそうにない。p は3以上の整数として $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ を一般化された超幾何関数 ${}_p\mathrm{F}_q(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};z)$ を用いると表すことができる。

$(c)_k$ は $(c)_0=1$,

k が自然数のとき $(c)_k=c(c+1)(c+2)\cdots\cdots(c+k-1)$ を表すものとして，${}_p\mathrm{F}_q(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};z)$ は $|z|<1$ で収束するべき級数

$${}_p\mathrm{F}_q(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};z)={}_p\mathrm{F}_q(\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_p\};\{b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots,\ b_q\};z)$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k(a_2)_k\cdots\cdots(a_p)_k}{(b_1)_k(b_2)_k\cdots\cdots(b_q)_k}\cdot\frac{z^k}{k!}$$

で定義されている。

超幾何関数を用いて $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ を表すことを考える。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^p(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^p}{n^p(2n)!(n!)^{p-2}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^p}{(2n)!(n!)^{p-2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^p}{(2k+2)!((k+1)!)^{p-2}}$$

ここで $(2k+2)!=(2k+2)!!(2k+1)!!$

$$=2(k+1)\cdot 2k\cdots\cdots 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}+1\right)\cdots\cdots\left(\frac{3}{2}+k-1\right)\cdot 2^k$$
$$=2^{k+1}(k+1)!\left(\frac{3}{2}\right)_k 2^k=2\cdot 4^k(2)_k\left(\frac{3}{2}\right)_k$$

と変形できるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^p}{(2k+2)!((k+1)!)^{p-2}}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((1)_k)^p}{2\cdot 4^k(2)_k\left(\frac{3}{2}\right)_k((2)_k)^{p-2}}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((1)_k)^{p+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)_k((2)_k)^{p-1}}\cdot\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$
$$=\frac{1}{2}{}_{p+1}\mathrm{F}_p\left(\{1,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 1\};\left\{\frac{3}{2},\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2\right\};\frac{1}{4}\right)$$

となる。

Mathematica で近似値を求めると

$p=3$ のとき，0.522946

$p=4$ のとき，0.511097

$p=5$ のとき，0.505429

$p=6$ のとき，0.502677

$p=7$ のとき，0.501326

……

これから

$$\boxed{\lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots⑫}$$

と予想できる。

証明は次のようにできる。

$n\geqq 2$，$p\geqq 2$ とすると不等式 $n^p>p$ が成り立つ (証明省略) ので

$$0<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p{}_{2n}\mathrm{C}_n}\leqq\frac{1}{p}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

ここで，$p\to\infty$ とすれば

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p{}_{2n}\mathrm{C}_n}=0$$

となるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

と変形すれば⑫を得る。

《参考文献》

〔1〕 多項式のラプソディー　p.58　西山　享　日本評論社

(栃木県立佐野高等学校)