自然対数の底 e の近似値について 面積の大小を利用する求め方

島谷（しまたに）　道郎（みちろう）

§0. はじめに

比較的簡単に自然対数の底 e の近似値が挟み撃ちの形で求まることに気がつきましたので報告します。高 3 の学年末試験を作成するために微分も積分もし易く入試にもよく出る関数 xe^{-x} について検討するうちに，上記のことに気づき，つぎのような問題を出題しました。

§1. 問題

$f(x)=(-x+2)e^x-2$ とし，曲線 $y=f(x)$ の $0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ の部分を C とする。

(1) C の増減，凹凸を調べよ。

(2) C と x 軸および直線 $x=\frac{1}{2}$ で囲まれる部分の面積を S とする。S を求めよ。

(3) 直線 $x=\frac{1}{2}$ と x 軸，C の交点を P，Q とする。また $y=f(x)$ の原点Oにおける接線と直線 $x=\frac{1}{2}$ の交点をRとする。△OPQ，△OPR の面積を求めよ。

(4) S，△OPQ，△OPR の大小を考えて，自然対数の底 e は $2.71<e<2.73$ を満たすことを証明せよ。

§2. 略解

(1) $0<x\leqq\frac{1}{2}$ で $f'(x)=(-x+1)e^x>0$，

$f''(x)=-xe^x<0$

よって単調増加，上に凸

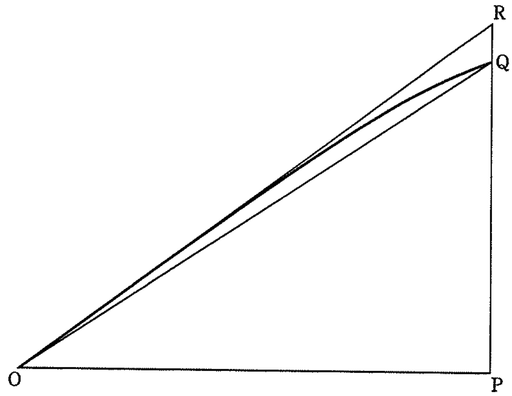
(2) $S=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\,dx=\Big[(-x+3)e^x-2x\Big]_0^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{5}{2}\sqrt{e}-4$

(3) $\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}\sqrt{e}-\frac{1}{2}$

原点における接線は $y=x$ で，

$\triangle\mathrm{OPR}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$



(4) 図の太線は曲線 C を表し，C と線分 OP，PQ で囲まれる部分の面積が S である。(1)の結果より図のように

△OPQ$<S<$△OPR であり，(2)，(3)の値を代入して式変形すると $\frac{28}{17}<\sqrt{e}<\frac{33}{20}$ となり，2 乗すると $\frac{784}{289}<e<\frac{1089}{400}$ となる。

$\frac{784}{289}=2.7128\cdots$，$\frac{1089}{400}=2.7225$ であるから

$2.71<e<2.73$ である。

(なお受験者 29 人中 7 人が正解しました。)

§3. 考察

まず，関数 xe^{-x} を $f(x)=(-x+2)e^x-2$ と変えたのは，変曲点を原点にし，原点における接線を $y=x$ という簡単な形にするためである。さて，e の近似値がこのように単純な図形の大小で比較的精度よく求まる理由について考えてみたい。まずこの問題を少し一般化して，曲線 $y=f(x)$ の $0\leqq x\leqq t$

(ただし $0<t\leqq 1$ とする。)の部分を C とし，直線 $x=\frac{1}{2}$ を直線 $x=t$ に変えて同様なことを行うと

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\left(-\frac{t^2}{2}+t\right)e^t-t,$$

$$S=(-t+3)e^t-2t-3,$$

$$\triangle\mathrm{OPR}=\frac{1}{2}t^2$$

となる。$\triangle\mathrm{OPQ}<S<\triangle\mathrm{OPR}$ であるから，式変形して

$$\frac{6+2t}{6-4t+t^2}<e^t<\frac{6+4t+t^2}{6-2t} \quad \cdots①$$

つまり $\left(\frac{6+2t}{6-4t+t^2}\right)^{\frac{1}{t}}<e<\left(\frac{6+4t+t^2}{6-2t}\right)^{\frac{1}{t}}$ $\cdots②$

ここで $t=1$ とすると

$2.66\cdots=\frac{8}{3}<e<\frac{11}{4}=2.75$ であり，$t=\frac{1}{2}$ とした場合がこの問題である。$t=0.1$，$t=0.01$ としてパソコンで計算すると②は，それぞれ

$2.71824<e<2.71832$

$2.718281791<e<2.718281866$

となる。ここで $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ であるが $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ で $t=0.01$ とすると $2.7048138\cdots$ となり $2.71828\cdots$ とはまだ差がある。そこで，不等式①の意味をはっきりさせるために整級数の形に式変形してみた。

$$\frac{6+2t}{6-4t+t^2}=1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{36}t^4+\cdots$$

$$\frac{6+4t+t^2}{6-2t}=1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{18}t^4+\cdots$$

$$e^t=1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^4+\cdots$$

つまり，この図形の大小から t の3次の項まで一致する近似式が挟み撃ちの形で得られた。そこでさらに一般化して

$S(t)=\int_0^t f(x)\,dx$，$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}tf(t)=Q(t)$，

$\triangle\mathrm{OPR}=\frac{1}{2}f'(0)t^2=R(t)$ とおく。ただし $t>0$，

$f(t)>0$，$f(0)=0$，$f'(0)>0$，$f''(0)=0$ とする。そうすると

$S(0)=Q(0)=R(0)$，$S'(0)=Q'(0)=R'(0)$，

$S''(0)=Q''(0)=R''(0)$，

$S'''(0)=Q'''(0)=R'''(0)$ となる。

つまり，一般的に原点を変曲点とする曲線でこのように設定した3つの図形の面積(t の関数)は整級数展開すれば3次の項まで一致することがわかる。そこで原点が変曲点となる $f''(x)=-x^n e^x$ を満たす関数(nは自然数)

$$f(x)=\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}(k+1)\,{}_n\mathrm{P}_k\,x^{n-k}\right)e^x-(n+1)!$$

について，nを奇数とすると $0\leqq x\leqq 1$ で単調増加，上に凸となるので，前のように3つの図形の面積の大小から e の近似値が求められ，nを大きくすれば近似の精度はあがると考えられる。

出題した問題は $n=1$ の場合であるが，$n=3$ とすると

$f(x)=(-x^3+6x^2-18x+24)e^x-24$

で，$t=1$ としても

$2.7169\cdots=\frac{144}{53}<e<\frac{87}{32}=2.71875$

となり，計算も比較的簡単である。また①の挟み撃ちの形で t の5次の項まで一致する近似式が得られる。

一般的には $t=1$ として，n を正の奇数とすると

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}(k+1)\,{}_n\mathrm{P}_k\right)e-\frac{1}{2}(n+1)!$$

$$S(1)=\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(k+1)(k+2)}{2}\,{}_n\mathrm{P}_k\right)e-(n+1)!-\frac{(n+2)!}{2}$$

$$\triangle\mathrm{OPR}=\frac{1}{2}f'(0)=\frac{1}{2}n!$$

$\triangle\mathrm{OPQ}<S<\triangle\mathrm{OPR}$ であるから，式変形して

$$\frac{(n+1)(n+3)}{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(k+1)^2}{(n-k)!}}<e<\frac{n^2+5n+5}{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(k+1)(k+2)}{(n-k)!}}$$

という不等式が成立する。$n=5$ とすると

$2.718263<\frac{5760}{2119}<e<\frac{1650}{607}=2.718287$

$e=2.71828\cdots$ ぐらいは知っていたが，もう少し詳しい値を求めたくて $n=9$ とすると

$2.7182818273<\frac{43545600}{16019531}<e<\frac{11884320}{4371997}$

<2.7182818287

と小数第8位まで求めることができました。

このように $f''(x)=-x^n e^x$ という比較的扱いやすい関数を利用し，変曲点の近くの視覚的にわかりやすい面積の大小で e の近似値が挟み撃ちの形で求められることがわかりました。

(神奈川県　関東学院中学高等学校)