区分求積の研究

村上（むらかみ）　仙瑞（せんずい）

§1．区分求積について

区分求積はまさに，積分の定義（分けたものを積み上げる）そのもので，次で定義される。

関数 $f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続として，区間を n 等分して，$\dfrac{b-a}{n}=\Delta x$ とおくと，これは長方形の横の長さであり，このとき長方形の左の縦の長さに合わせるか，右の縦の長さに合わせるかによって，長方形の面積の和の極限を考え，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n} \tag{1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n} \tag{2}$$

$$=\int_a^b f(x)dx \tag{3}$$

が成り立つというものである。

この式(1)（または(2)）から式(3)へのイメージは，$n\to\infty$ のとき，

$$x_k=a+\frac{b-a}{n}k : a+\frac{b-a}{n}\times 0 \to a+\frac{b-a}{n}(n-1) \tag{4}$$

であるから，

$x_k\to x$ として，

$$x : a\to b \tag{5}$$

より，

$$\sum_{k=0}^{n-1}\to\int_a^b$$

$$f(x_k)\to f(x)$$

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}\to dx$$

ということである。

式(1)（または(2)についても同様な議論ができる）は，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n} \tag{6}$$

$$=(b-a)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+(b-a)\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \tag{7}$$

と書き直され，(7)は，

$$(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)dx$$

で表される。これは次のような置換積分で確かめられる。つまり，$t=a+(b-a)x$ とおくと，$dx=\dfrac{dt}{b-a}$ となり，t の範囲は，$a\leqq t\leqq b$ であるから，

$$(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)dx=\int_a^b f(t)dt \tag{8}$$

となるから，あとは t を x に戻せば(3)となる。

この式(6)と式(7)の意味（関係）について考える。

$$f(a+(b-a)x)=f\left((b-a)\left(x+\frac{a}{b-a}\right)\right)$$

は $f(x)$ を x 軸方向に $\dfrac{1}{b-a}$ 倍して，$-\dfrac{a}{b-a}$ 平行移動した式であるから，積分の範囲 $a\to b$（幅が $b-a$）から $0\to 1$（幅が1）に変換されているというところがポイントである。つまり，長方形の横の長さ $\dfrac{b-a}{n}$ から $\dfrac{1}{n}$ へ変換して考えることになるということである。

最近の高校の教科書や受験参考書で確認すると，区分求積に関しては複雑な問題が見られず，

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{9}$$

の形に直して区分求積の問題を解かせるパターンがほとんどである。しかし中には，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3n}f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{10}$$

とか，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{3n}f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{11}$$

など，k の範囲が違った形も多少は見られるが，私たちが受験した頃（1990年代）に比べてはあまりにパターンが少なすぎるような気がする。ただパターンが当てはまったから解けて，そうでないから解け

ないというのであれば全く意味がない。区分求積は式が複雑で，a と b の値によって，色々なパターンが作られるが，たとえば，(10)や(11)が解けたとしても，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=n+1}^{4n}\sin\left(5+\frac{3k}{n}\right) \tag{12}$$

という区分求積の問題は簡単に解けるであろうか。a と b の値をいくらにしたらよいか少しは悩むはずである。

しかしどのような形であっても，区分求積で一番難しいのは，**どのような関数をどの範囲で積分するか（足し合わせるか）**ということで，これを解決できるには，n 等分に分割した長方形の横の長さがカギを握る。本稿では，n 等分に分割した長方形の横の長さに注目して区分求積の問題を解くという，私なりの研究成果を述べることにしたい。

§2. 区分求積の計算

区分求積でポイントは長方形の横の長さにあたる $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ がカギを握る。つまりどの区間の長さを n 等分して，それを長方形の横の長さとして長方形の面積の和の極限を考えているかということである。

それではいろいろな例を考えていくことにする。

【例１】 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}$ を求めよ。

（解法１）

$a=1$，$b=2$，$f(x)=\sqrt{x}$ と考えれば，これも同じように，式(7)より，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}=\int_1^2\sqrt{x}\,dx \tag{13}$$

$$=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^2 \tag{14}$$

$$=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) \tag{15}$$

これは，長方形の横の長さが $\dfrac{1}{n}$ であるが，

$f(x)=\sqrt{x}$ を $[1,\ 2]$ 区間で n 等分して長方形を作ったということで，その長方形を積み上げている（積分している）という意味である。積分範囲であるが，(17)より，

$$x_k=1+\frac{1}{n}k$$

ということだから，(4)と(5)より，

$$x:1\to 2$$

となっている。

また，次のようにも考えることができる。

（解法２）

$a=0$，$b=1$，$f(x)=\sqrt{x}$ と考えれば，式(6)より，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n} \tag{16}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(0+\frac{1}{n}k\right)}\frac{1}{n} \tag{17}$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx \tag{18}$$

$$=\left[\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}\right]_0^1 \tag{19}$$

$$=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) \tag{20}$$

これも，長方形の横の長さが $\dfrac{1}{n}$ であるが，

$f(x)=\sqrt{x}$ を $[0,\ 1]$ 区間で n 等分して長方形を作ったということである。積分範囲であるが，(17)より，

$$x_k=0+\frac{1}{n}k$$

ということであるから，(4)と(5)より，

$$x:0\to 1$$

となる。また，$y=\sqrt{1+x}$ は，$f(x)=\sqrt{x}$ を x 軸方向に -1 平行移動して，それに伴い積分範囲も -1 平行移動されて，もちろんであるが定積分（この場合は x 軸と囲まれた面積）は変わらないことは明らかである。

つまり，a，b のとりかたが決まれば，分割した長方形の横の長さが決まり，極限をとる前の変数 x_k が決まり，それに伴い $f(x)$ が作れるという流れである。

次に少し複雑な区分求積の問題を考えることにする。

【例２】 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{5k}{n}}\frac{3}{n}$ を求めよ。

（解法１）

まず大事なことは，分割した長方形の横の長さがいくらかであるかということであるが，$\dfrac{3}{n}$ としよう。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{5k}{n}}\frac{3}{n} \tag{21}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{3k}{n}\right)}\frac{3}{n} \tag{22}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{5}{3}\left(0+\frac{3}{n}k\right)}\frac{3}{n} \tag{23}$$

$$=\int_0^3\sqrt{1+\frac{5}{3}x}\,dx \tag{24}$$

$$=\left[\frac{2}{5}\left(1+\frac{5}{3}x\right)\sqrt{1+\frac{5}{3}x}\right]_0^3 \tag{25}$$

$$=\frac{2}{5}(6\sqrt{6}-1) \tag{26}$$

分割した長方形の横の長さを $\frac{3}{n}$ とすることによって，極限をとる前の変数 $x_k=0+\frac{3}{n}k$ と作ることができ，積分範囲も(4)と(5)より，

$$x : 0\to 3$$

となることに注意。積分範囲を確認しやすくするために，式変形で一度(23)をおさえておくとよいだろう。

(解法 1')

大事なことは，長方形の横の長さを $\frac{3}{n}$ としたことで，(22)から(23)への変形を

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{-\frac{17}{3}+\frac{5}{3}\left(4+\frac{3}{n}k\right)}\frac{3}{n}$$

$$=\int_4^7\sqrt{-\frac{17}{3}+\frac{5}{3}x}\,dx$$

などとしてもかまわないということである。もちろん，答えも $\frac{2}{5}(6\sqrt{6}-1)$ になるのはいうまでもない。

(解法 2)

次に分割した長方形の横の長さを $\frac{1}{n}$ としよう。つまり，

$$3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{5k}{n}}\frac{1}{n}$$

と問題を置き換えるのである。

$$3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{5k}{n}}\frac{1}{n} \tag{27}$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+5\cdot\left(\frac{k}{n}\right)}\frac{1}{n} \tag{28}$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+5\left(0+\frac{1}{n}k\right)}\frac{1}{n} \tag{29}$$

$$=\int_0^1 3\sqrt{1+5x}\,dx \tag{30}$$

$$=\left[\frac{2}{5}(1+5x)\sqrt{1+5x}\right]_0^1 \tag{31}$$

$$=\frac{2}{5}(6\sqrt{6}-1) \tag{32}$$

今まで見てきたように，**区分求積の問題は分割した長方形の横の長さが非常に大事で，ポイントになっている**ということである。

以上の具体例の解説から，(12)の問題も同じように解ける。

【例 3】 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{4n}\sin\left(5+\frac{3k}{n}\right)\frac{2}{n} \tag{33}$$

(解答)

分割した長方形の横の長さを $\frac{2}{n}$ としよう。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{4n}\sin\left(5+\frac{3k}{n}\right)\frac{2}{n} \tag{34}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{4n}\sin\left(5+\frac{3}{2}\left(0+\frac{2}{n}k\right)\right)\frac{2}{n} \tag{35}$$

$$=\int_2^8\sin\left(5+\frac{3}{2}x\right)dx \tag{36}$$

$$=\left[-\frac{2}{3}\cos\left(5+\frac{3}{2}x\right)\right]_2^8 \tag{37}$$

$$=-\frac{2}{3}(\cos 17-\cos 8) \tag{38}$$

これも長方形の横の長さを先に決めることによって，(35)のように変形して極限をとる前の変数 $x_k=0+\frac{2}{n}k$ と作ることができ，積分範囲も(4)と(5)より，

$$x : 2\to 8$$

となることに注意。

次に大学入試の問題を解くことにする。

【例 4】 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(p-\frac{k\pi}{n}\right)^2+\left(q-\sin\frac{k\pi}{n}\right)^2\right\}$$

〔類 新潟大〕

この問題を解く上で，p と q の文字について惑わされないように気をつける必要がある。

(解答)

分割した長方形の横の長さを $\frac{\pi}{n}$ としよう。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(p-\frac{k\pi}{n}\right)^2+\left(q-\sin\frac{k\pi}{n}\right)^2\right\}\frac{\pi}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(p-\left(0+\frac{\pi}{n}k\right)\right)^2+\left(q-\sin\left(0+\frac{\pi}{n}k\right)\right)^2\right\}\frac{\pi}{n}$$

$$=\int_0^{\pi}\{(p-x)^2+(q-\sin x)^2\}dx$$

となる。長方形の横の長さを $\frac{\pi}{n}$ にすることによって，極限をとる前の変数 $x_k=0+\frac{\pi}{n}k$ となっていることに注意。

最後に今までと少しは内容が違うが，誤解を招きやすい問題を紹介する。

> 【例5】 自然数 n に対して，
> $$a_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+(2n-1)}$$
> とおく。このとき，$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。 〔群馬大〕

(解答)

まず，誤答例から述べることにする。

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+(2k-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+(2k-1)\frac{1}{n}}\frac{1}{n}$$
$$=\int_2^4\frac{1}{x}dx$$

この解答のどこが誤りかというと，代入していく k の部分が，$2k-1$ となっているところである。したがって，$(2k-1)$ の部分を k にする必要がある。そのためには，次のように式変形して答えを出す必要がある。

$$a_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2n+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+2k}$$
$$=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$\to\int_2^4\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{x}dx \quad (n\to\infty)$$
$$=[\log x]_2^4-\frac{1}{2}[\log x]_1^2=\frac{1}{2}\log 2$$

§3. 最後に

今までの議論から，全ての区分求積の問題を理解して，網羅するという意味で，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=sn+t}^{pn+q}f\left(a+\frac{b}{n}k\right)\frac{c}{n} \tag{39}$$

(ただし，p，q，s，t は任意の自然数 n に対して，$pn+q>sn+t$ を満たす整数とする) という和の極限を積分の形で表すと，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=sn+t}^{pn+q}f\left(a+\frac{b}{n}k\right)\frac{c}{n} \tag{40}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=sn+t}^{pn+q}f\left(a+\frac{b}{c}\left(0+\frac{c}{n}k\right)\right)\frac{c}{n} \tag{41}$$
$$=\int_{sc}^{pc}f\left(a+\frac{b}{c}x\right)dx \tag{42}$$

という形で表されるということが，安易に理解できるはずである。もちろん，これも長方形の横の長さを $\frac{c}{n}$ と先に決めることによって，(41)のように変形して極限をとる前の変数 $x_k=0+\frac{c}{n}k$ と作ることができ，積分範囲も(4)と(5)より，

$$x: sc\to pc$$

となることに注意。もちろん，横の長さを $\frac{1}{n}$ ととると，(39)は，

$$c\int_s^p f(a+bx)dx \tag{43}$$

となる。

また積分の範囲を考えるとき q や t の値は消えているが，これは積分が無限個の足し算を一気に行う計算であるから，無限個のものに対して，1個や2個，さらには5個や6個，さらには有限個のものを加えたり，取り去っても何の影響も受けないということもこの式から読み取れる。つまり，$\sum_{k=5}^{n+5}$ でも，$\sum_{k=1000}^{n-100}$ でも積分範囲は変わらないということである。

区分求積はある意味イメージ優先で高校の教科書は解説して問題演習をするが，高校の間はそれで全く間違いないと思う。

区分求積は定積分の定義そのもので，大事なことは自分で区分求積の定義式を作れるようになれないと，本当に定積分を理解したとはいえないということも心にとめておく必要があるだろう。きちんとした区分求積の図形的なイメージを描けることが大事であると考える。

《参考文献》

〔1〕『数学III』，数研出版，2005

〔2〕大学への数学『解法の探究II』，東京出版，2000

〔3〕大学への数学『新数学演習』，東京出版，2000

(兵庫県　甲南中学高等学校)