$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}<1$ を満たす自然数 a, b, c, d, e に対して $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}$ の最大値について

柳田（やなぎだ）　五夫（いつお）

§0. はじめに

3年生のある生徒が次の入試問題

> (1)　a, b を $a<b$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<1$ を満たす自然数とするとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ の最大値が $\dfrac{5}{6}$ であることを証明せよ。
>
> (2)　a, b, c を $a<b<c$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<1$ を満たす自然数とするとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ の最大値が $\dfrac{41}{42}$ であることを証明せよ。　〔06　富山大〕

を解いたとき，$\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{41}{42}=\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{7}$ から変数が4個の場合 $\dfrac{1805}{1806}=\dfrac{41}{42}+\dfrac{1}{43}$, 5個の場合は $\dfrac{3263441}{3263442}=\dfrac{1805}{1806}+\dfrac{1}{1807}$ が最大値であることを予想した。興味深い値なので，証明を試みた。ただし，3個の場合の解法で証明することは面倒である。

§1. 準備

場合分けを減らすために，次の2つの定理を用意しておく。

> **定理1**　m, n は $m<n$ を満たす互いに素な自然数とする。x, y を $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{m}{n}$ を満たす自然数とするとき，　$p=\left[\dfrac{n}{m}\right]$ とおくと
>
> $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{m(p+1)-n}{n(p+1)+1}$ である。

（注1）$\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{m(p+1)-n}{n(p+1)+1}$ が $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の最大値となるのは $n(p+1)+1$ が $m(p+1)-n$ で割り切れるときである。

> **系1**　n は与えられた自然数とする。
>
> x, y を $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{n}$ を満たす自然数とするとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の最大値は $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n^2+n+1}$ である。

> **定理2**　n は与えられた自然数とする。x, y, z を $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{n}$ を満たす自然数とするとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ の最大値は
>
> $$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{1}{n^2(n+1)^2+n(n+1)+1}$$
>
> である。

まず，次の補題を示しておく。

> **補題1**　A, B を自然数とするとき，
>
> $\left[\dfrac{A}{B}\right]\geqq\dfrac{A+1}{B}-1$ が成り立つ。
>
> 等号は $A+1$ が B で割り切れるときである。

[補題1の証明]　A を B で割ったときの商を Q, 余りを R とすると，$A=BQ+R$, $0\leqq R\leqq B-1$ から

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B},\ 0\leqq\frac{R}{B}\leqq\frac{B-1}{B}<1 \quad \therefore\ \left[\frac{A}{B}\right]=Q$$

次に

$$\left[\frac{A}{B}\right]=Q=\frac{A}{B}-\frac{R}{B}\geqq\frac{A}{B}-\frac{B-1}{B}=\frac{A+1}{B}-1$$

等号は $A+1$ が B で割り切れるときである。　■

[定理 1 の証明]

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{m}{n}$ から $x>\frac{n}{m}$

$\therefore\quad x\geqq\left[\frac{n}{m}\right]+1=p+1$

$x=p+k$（k は自然数）とおくと

$$y>\frac{nx}{mx-n}=\frac{n(p+k)}{m(p+k)-n}$$

$$\therefore\quad y\geqq\left[\frac{n(p+k)}{m(p+k)-n}\right]+1$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}&\leqq\frac{1}{p+k}+\frac{1}{\left[\frac{n(p+k)}{m(p+k)-n}\right]+1}\\&\leqq\frac{1}{p+k}+\frac{1}{\frac{n(p+k)+1}{m(p+k)-n}}\qquad(\because \text{補題 1})\\&=\frac{1}{p+k}+\frac{m(p+k)-n}{n(p+k)+1}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p+1}+\frac{m(p+1)-n}{n(p+1)+1}-\frac{1}{p+k}-\frac{m(p+k)-n}{n(p+k)+1}\\&=\frac{k-1}{(p+1)(p+k)}-\frac{(k-1)(m+n^2)}{\{n(p+1)+1\}\{n(p+k)+1\}}\\&=\frac{(k-1)\{n(p+1)+n(p+k)+1-m(p+1)(p+k)\}}{(p+1)(p+k)\{n(p+1)+1\}\{n(p+k)+1\}}\\&=\frac{(k-1)\{n(p+1)+1-[m(p+1)-n](p+k)\}}{(p+1)(p+k)\{n(p+1)+1\}\{n(p+k)+1\}}\quad(*)\end{aligned}$$

$k=1$ または $p+k\leqq\frac{n(p+1)+1}{m(p+1)-n}$ のときは $(*)\geqq0$

したがって $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leqq\frac{m(p+1)-n}{n(p+1)+1}+\frac{1}{p+1}$

等号が成り立つのは，$n(p+1)+1$ が $m(p+1)-n$ で割り切れて，例えば $x=p+1$，$y=\frac{n(p+1)+1}{m(p+1)-n}$ のときである。

$p+k>\frac{n(p+1)+1}{m(p+1)-n}$ のときは，

$x=p+k>\frac{n(p+1)+1}{m(p+1)-n}$ で

$\frac{1}{y}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{m}{n}$ から $y>\frac{n}{m}$

$\therefore\quad y\geqq\left[\frac{n}{m}\right]=p+1$

よって $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{m(p+1)-n}{n(p+1)+1}+\frac{1}{p+1}$

である。 ■

定理 1 で $m=1$ とおくと系 1 がでる。

[定理 2 の証明]

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{n}$ から $x>n$ $\therefore$ $x\geqq n+1$

$x=n+k$（k は自然数）とおくと

$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{k}{n(n+k)}$

$p=\left[\frac{n(n+k)}{k}\right]$ とおくと $p\leqq\frac{n(n+k)}{k}$

また補題 1 より $p=\left[\frac{n(n+k)}{k}\right]\geqq\frac{n(n+k)+1}{k}-1$

したがって $\frac{n(n+k)+1}{k}\leqq p+1\leqq\frac{n(n+k)}{k}+1$

定理 1 から $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqq\frac{1}{p+1}+\frac{k(p+1)-n(n+k)}{n(n+k)(p+1)+1}$

ここで $\frac{n(n+k)+1}{k}\leqq r\leqq\frac{n(n+k)}{k}+1$ …①

$f(r)=\frac{1}{r}+\frac{kr-n(n+k)}{n(n+k)r+1}$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(r)&=-\frac{1}{r^2}+\frac{k\{n(n+k)r+1\}-\{kr-n(n+k)\}n(n+k)}{\{n(n+k)r+1\}^2r^2}\\&=\frac{kr^2-2n(n+k)r-1}{\{n(n+k)r+1\}^2r^2}\end{aligned}$$

①により $r\leqq\frac{n(n+k)}{k}+1<\frac{2n(n+k)}{k}$

であるから $f'(r)<0$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&\leqq\frac{1}{n+k}+f(p+1)\\&\leqq\frac{1}{n+k}+f\left(\frac{n(n+k)+1}{k}\right)\\&=\frac{1}{n+k}+\frac{1}{\frac{n(n+k)+1}{k}}+\frac{k\cdot\frac{n(n+k)+1}{k}-n(n+k)}{n(n+k)\cdot\frac{n(n+k)+1}{k}+1}\\&=\frac{1}{n+k}+\frac{k}{n(n+k)+1}+\frac{k}{n^2(n+k)^2+n(n+k)+k}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)+1}+\frac{1}{n^2(n+1)^2+n(n+1)+1}\\&-\frac{1}{n+k}-\frac{k}{n(n+k)+1}-\frac{k}{n^2(n+k)^2+n(n+k)+k}\\&=\frac{k-1}{(n+1)(n+k)}-\frac{(k-1)(1+n^2)}{\{n(n+1)+1\}\{n(n+k)+1\}}\\&-\frac{(k-1)n^2(1+n^2-k)}{\{n^2(n+1)^2+n(n+1)+1\}}\times\frac{1}{\{n^2(n+k)^2+n(n+k)+k\}}\\&=(k-1)\{1+n^2-k\}\times\\&\left\{\frac{1}{(n+1)(n+k)\{n(n+1)+1\}\{n(n+k)+1\}}\right.\\&\left.-\frac{n^2}{\{n^2(n+1)^2+n(n+1)+1\}\{n^2(n+k)^2+n(n+k)+k\}}\right\}\end{aligned}$$

(＊)

$$\{n^2(n+1)^2+n(n+1)+1\}>n^2(n+1)^2+n(n+1)$$
$$=n(n+1)\{n(n+1)+1\}$$
$$\{n^2(n+k)^2+n(n+k)+k\}>n^2(n+k)^2+n(n+k)$$
$$=n(n+k)\{n(n+k)+1\}$$

が成り立つので（＊）の｛｝内の式>0

したがって，$1\leqq k\leqq n^2+1$ のときは

$$\frac{1}{n+k}+\frac{k}{n(n+k)+1}+\frac{k}{n^2(n+k)^2+n(n+k)+k}$$
$$\leqq\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)+1}+\frac{1}{n^2(n+1)^2+n(n+1)+1}$$

が成り立つから，

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqq\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)+1}+\frac{1}{n^2(n+1)^2+n(n+1)+1}$$

等号は例えば $x=n+1$，$y=n(n+1)+1$，$z=n^2(n+1)^2+n(n+1)+1$ のとき成り立つ。

$k>n^2+1$ すなわち $k\geqq n^2+2$ のときは，$n+k\geqq n^2+n+2$

$x\leqq y\leqq z$ と仮定してよく

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqq\frac{3}{x}\leqq3\cdot\frac{1}{n^2+n+2}$ で

$$\frac{1}{n^2+n+2}<\frac{1}{n^2+n+1},\quad\frac{2}{n^2+n+2}\leqq\frac{1}{n+1}$$

から $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{1}{n+1}$

$$<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{1}{n^2(n+1)^2+n(n+1)+1}\ ■$$

§2．変数が4個の場合

> a，b，c，d が $a<b<c<d$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}<1$ を満たす自然数のとき，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ の最大値は $\frac{1805}{1806}$ である。

［証明］ $P(a,\ b,\ c,\ d)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ とおく。

(1) $a=2$ の場合 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}<\frac{1}{2}$ 　定理2から

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\leqq\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+2+1}+\frac{1}{2^2(2+1)^2+2(2+1)+1}$$

$$\therefore\ P(2,\ b,\ c,\ d)\leqq\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}=\frac{1805}{1806}$$

(2) $a\geqq3$ の場合

$$P(a,\ b,\ c,\ d)\leqq\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{19}{20}$$

(1)，(2)から $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ の最大値は $\frac{1805}{1806}$

§3．変数が5個の場合

> a，b，c，d，e が $a<b<c<d<e$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}<1$ を満たす自然数のとき，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}$ の最大値は $\frac{3263441}{3263442}$ である。

［証明］ $P(a,\ b,\ c,\ d,\ e)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}$ とおく。

(1) $a=2$ の場合 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$

(i) $b=3$ のとき $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}<\frac{1}{6}$ 　定理2から

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\leqq\frac{1}{6+1}+\frac{1}{6^2+6+1}+\frac{1}{6^2\cdot7^2+6\cdot7+1}$$

$$\therefore P(2,\ 3,\ c,\ d,\ e)\leqq\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1807}=\frac{3263441}{3263442}$$

(ii) $b=4$ のとき $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}<\frac{1}{4}$ 　定理2から

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\leqq\frac{1}{4+1}+\frac{1}{4^2+4+1}+\frac{1}{4^2\cdot5^2+4\cdot5+1}$$

$$\therefore P(2,\ 4,\ c,\ d,\ e)\leqq\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{21}+\frac{1}{421}=\frac{176819}{176820}$$

(iii) $b=5$ のとき $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}<\frac{3}{10}$

$c=6$ のとき $\frac{1}{d}+\frac{1}{e}<\frac{2}{15}$，$p=\left[\frac{15}{2}\right]=7$

$$\therefore\ P(2,5,6,d,e)\leqq\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7+1}+\frac{2(7+1)-15}{15(7+1)+1}=\frac{14519}{14520}$$

$c=7$ のとき $\frac{1}{d}+\frac{1}{e}<\frac{11}{70}$，$p=\left[\frac{70}{11}\right]=6$

$$\therefore\ P(2,5,7,d,e)<\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6+1}+\frac{11(6+1)-70}{70(6+1)+1}=\frac{34369}{34370}$$

$c=8$ のとき $\frac{1}{d}+\frac{1}{e}<\frac{7}{40}$，$p=\left[\frac{40}{7}\right]=5$

$$\therefore\ P(2,5,8,d,e)<\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5+1}+\frac{7(5+1)-40}{40(5+1)+1}=\frac{28919}{28920}$$

$c=9$ のとき $\frac{1}{d}+\frac{1}{e}<\frac{17}{90}$，$p=\left[\frac{90}{17}\right]=5$

$$\therefore\ P(2,5,9,d,e)<\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{5+1}+\frac{17(5+1)-90}{90(5+1)+1}=\frac{24344}{24345}$$

$c\geqq10$ のとき $\therefore\ P(2,5,c,d,e)\leqq$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}=\frac{643}{660}\left(<\frac{659}{660}\right)$$

(iv) $b=6$ のとき $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}<\frac{1}{3}$ 定理2から

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}<\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+3+1}+\frac{1}{3^2\cdot 4^2+3\cdot 4+1}$$

($c\geqq 7$ より等号は成立しない)

$$\therefore\ P(2,6,c,d,e)<\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{13}+\frac{1}{157}=\frac{24491}{24492}$$

(v) $b\geqq 7$ のとき $\therefore\ P(2,b,c,d,e)\leqq$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=\frac{2467}{2520}\left(<\frac{2519}{2520}\right)$$

(2) $a=3$ の場合 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}<\frac{2}{3}$

(i) $b=4$ のとき $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}<\frac{5}{12}$

$c=5$ のとき $\frac{1}{d}+\frac{1}{e}<\frac{13}{60}$, $p=\left[\frac{60}{13}\right]=4$

$$\therefore\ P(3,4,5,d,e)<\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4+1}+\frac{13(4+1)-60}{60(4+1)+1}=\frac{21599}{21660}$$

$$\left(<\frac{21659}{21660}\right)$$

$c=6$ のとき $\frac{1}{d}+\frac{1}{e}<\frac{1}{4}$ $\therefore\ P(3,4,6,d,e)<$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+5+1}=\frac{353}{372}\left(<\frac{371}{372}\right)$$

$c\geqq 7$ のとき

$$P(3,4,c,d,e)\leqq\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}=\frac{485}{504}\left(<\frac{503}{504}\right)$$

(ii) $b\geqq 5$ のとき

$$P(3,b,c,d,e)\leqq\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{271}{280}\left(<\frac{279}{280}\right)$$

(3) $a\geqq 4$ の場合

$$P(a,b,c,d,e)\leqq\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{743}{840}\left(<\frac{839}{840}\right)$$

(1), (2), (3)から

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}$ の最大値は $\frac{3263441}{3263442}$ である。■

(注2) $\frac{326441}{3263442}$, $\frac{176819}{176820}$, $\frac{14519}{14520}$ 等 $\frac{A-1}{A}$ の形の分数の大小比較は

$$\boxed{0<A<B \text{ のとき } \frac{A-1}{A}<\frac{B-1}{B}}$$

を利用しました。

§4. おわりに

$P_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}$ とおくと $P_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)<1$ を満たす自然数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して $P_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ の最大値 $M_n=\frac{p_n-1}{p_n}$ は $p_1=2$, $p_{n+1}=p_n(p_n+1)$ で与えられることが容易に予測される。

(栃木県立佐野高等学校)