組立除法の拡張

―整式の除法の簡略化から導く―

渡辺　一夫（わたなべ　かずお）

§1. 積み算の簡略化

組立除法は，2次以上の整式で割る割り算の場合に拡張できます。これを通常の積み算の簡略化から導いてみます。

割る整式の最大次数の項の係数を1とします。

【例1】 2次式で割る場合
$(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)\div(x^2+fx+g)$

積み算が次のようになったとします。

[形式A]

$$
\begin{array}{rlccccc}
 & & ax^2 & +\beta x & +\gamma & & \\ \cline{3-7}
x^2+fx+g &) & ax^4 & +bx^3 & +cx^2 & +dx & +e \\
 & & hx^4 & +ix^3 & +jx^2 & & \\ \cline{3-7}
 & & & kx^3 & +lx^2 & +mx & \\
 & & & nx^3 & +px^2 & +qx & \\ \cline{4-7}
 & & & & rx^2 & +sx & +t \\
 & & & & ux^2 & +vx & +w \\ \cline{5-7}
 & & & & & \delta x & +\varepsilon
\end{array}
$$

まず，係数だけにします。

[形式B]

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \alpha & \beta & \gamma & & \\ \cline{5-9}
1 & f & g &) & a & b & c & d & e \\
 & & & & h & i & j & & \\ \cline{5-9}
 & & & & & k & l & m & \\
 & & & & & n & p & q & \\ \cline{6-9}
 & & & & & & r & s & t \\
 & & & & & & u & v & w \\ \cline{7-9}
 & & & & & & & \delta & \varepsilon
\end{array}
$$

$\alpha=h=a$，$\beta=n=k$，$\gamma=u=r$ より空欄にできる所を□で示します。

1も空欄にします。

[形式C]

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & a & k & r & & \\ \cline{5-9}
\square & f & g &) & a & b & c & d & e \\
 & & & & \square & i & j & & \\ \cline{5-9}
 & & & & & \square & l & m & \\
 & & & & & \square & p & q & \\ \cline{6-9}
 & & & & & & \square & s & t \\
 & & & & & & \square & v & w \\ \cline{7-9}
 & & & & & & & \delta & \varepsilon
\end{array}
$$

$c-j=l$，$l-p=r$ の2度の計算は $c-j-p=r$ で計算でき，l は必要ありません。

また，$d=m$，$m-q=s$，$s-v=\gamma$ は $d-q-v=\delta$ でよく，m，s は必要ありません。

さらに，$e=t$，$t-w=\varepsilon$ は，$e-w=\varepsilon$ でよく，t は必要ありません。

[形式D]

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & a & k & r & & \\ \cline{5-9}
\square & f & g &) & a & b & c & d & e \\
 & & & & \square & i & j & & \\ \cline{5-9}
 & & & & & \square & \square & \square & \\
 & & & & & \square & p & q & \\ \cline{6-9}
 & & & & & & \square & \square & \square \\
 & & & & & & \square & v & w \\ \cline{7-9}
 & & & & & & & \delta & \varepsilon
\end{array}
$$

空欄だけの行を詰め，仕切り線を消します。

[形式E]

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & a & k & r & & \\ \cline{4-8}
f & g &) & a & b & c & d & e \\
 & & & & i & j & & \\
 & & & & & p & q & \\
 & & & & & & v & w \\ \cline{7-8}
 & & & & & & \delta & \varepsilon
\end{array}
$$

これで簡略化が完了しました。

【例2】 1次式で割る場合
$(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)\div(x+f)$

積み算が次のようになったとします。

[形式A]

$$
\begin{array}{rlccccc}
 & & ax^3 & +\beta x^2 & +\gamma x & +\delta & \\ \cline{3-7}
x+f &) & ax^4 & +bx^3 & +cx^2 & +dx & +e \\
 & & gx^4 & +hx^3 & & & \\ \cline{3-7}
 & & & ix^3 & +jx^2 & & \\
 & & & kx^3 & +lx^2 & & \\ \cline{4-7}
 & & & & mx^2 & +nx & \\
 & & & & px^2 & +qx & \\ \cline{5-7}
 & & & & & rx & +s \\
 & & & & & tx & +u \\ \cline{6-7}
 & & & & & & \varepsilon
\end{array}
$$

例1と同様の簡略化をすると，

[形式E]

$$\begin{array}{r|lllll} & a & i & m & r & \\ \hline f) & a & b & c & d & e \\ & & h & & & \\ & & & l & & \\ & & & & q & \\ & & & & & \underline{u} \\ & & & & & \varepsilon \end{array}$$

l，q，u を上に詰めることができます。

[形式F]

$$\begin{array}{r|lllll} & a & i & m & r & \\ \hline f) & a & b & c & d & e \\ & & h & l & q & \underline{u} \\ & & & & & \varepsilon \end{array}$$

1行目の a，i，m，r を4行目に移し，仕切り線を変えると，

[形式G]

$$\begin{array}{c|ccccc} f & a & b & c & d & e \\ & & h & l & q & u \\ \hline & a & i & m & r & \varepsilon \end{array}$$

レイアウトは組立除法です。

しかし，これでは b から h を引くことにより，k を求めることになります。

最後に，次のような工夫をします。

f を前もって $-f$ としておきます。このことによって，h が $-h$ となり，i が b と $(-h)$ を足すことによって求まることになります。

[形式H]

$$\begin{array}{c|cccc|c} & a & b & c & d & e \\ -f & & -h & -l & -q & -u \\ \hline & a & i & m & r & \varepsilon \end{array}$$

正に組立除法です。($-f$ を1行移しました)

§2. 2次の組立除法

例1で組立除法を考案してみます。

[形式E]で単純に上に詰めるだけでは使いにくいものになります。そこで，次の工夫をします。i，p，v はそれぞれ a，k，r に f を，j，p，w はそれぞれ a，k，r に g を掛けたものである点に着目して，レイアウトを変えます。

[形式F]

$$\begin{array}{c|ccccc} & a & k & r & & \\ \hline & a & b & c & d & e \\ f & & i & p & v & \\ g & & & j & \underline{q} & \underline{w} \\ & & & & \delta & \varepsilon \end{array}$$

あとは例2のように，

[形式G]

$$\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ f & & i & p & v & \\ g & & & j & q & w \\ \hline & a & k & r & \delta & \varepsilon \end{array}$$

[形式H]

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & a & b & c & d & e \\ -f & & -i & -p & -v & \\ -g & & & -j & -q & -w \\ \hline & a & k & r & \delta & \varepsilon \end{array}$$

> 【例3】　2次式で割る場合の具体例
> $(2x^4-3x^3+x^2-1)\div(x^2-x+2)$

[形式H]で計算してみます。

$2x^4-3x^3+x^2-1$ の x^4 の係数を①，x^3 の係数を②，x^2 の係数を③，x の係数を④，定数項を⑤とする。また，x^2-x+2 の x の係数を⑥，定数項を⑦とする。

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & ① & ② & ③ & ④ & ⑤ \\ ⑧ & & ⑪ & ⑭ & ⑰ & \\ ⑨ & & & ⑫ & ⑮ & ⑱ \\ \hline & ⑩ & ⑬ & ⑯ & ⑲ & ⑳ \end{array}$$

まず，①～⑤の数字を上記の該当の位置に置く。

⑥，⑦のマイナス倍の値をそれぞれ⑧，⑨に置く。

そして，⑩～⑳には下記の計算で得られる値を置いていく。

⑩＝①，⑪＝⑩×⑧，⑫＝⑩×⑨，⑬＝②＋⑪，
⑭＝⑬×⑧，⑮＝⑬×⑨，⑯＝③＋⑭＋⑫，
⑰＝⑯×⑧，⑱＝⑯×⑨，⑲＝④＋⑰＋⑮，
⑳＝⑤＋⑱

すると，⑩が商の x^2 の係数，⑬が商の x の係数，⑯が商の定数項，⑲が余りの x の係数，
⑳が余りの定数項となる。

下記のようになれば完成です。

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & 2 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & & 2 & -1 & -4 & \\ -2 & & & -4 & 2 & 8 \\ \hline & 2 & -1 & -4 & -2 & 7 \end{array}$$

商 $2x^2-x-4$，余り $-2x+7$

[形式A]が上から下へ作成するのに対して，[形式H]は左から右へ作成します。

§3. 3次以上の組立除法

3次以上の整式で割る場合も，行を増すことによって計算できます。

> 【例4】　3次式で割る場合の具体例
> $(-3x^4+4x^3+6x^2-5x)\div(x^3-2x^2-x+3)$

次のようになれば完成です。

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & -3 & 4 & 6 & -5 & 0 \\
2 & & -6 & -4 & & \\
1 & & & -3 & -2 & \\
-3 & & & & 9 & 6 \\
\hline
 & -3 & \multicolumn{1}{r|}{-2} & -1 & 2 & 6
\end{array}
$$

商 $-3x-2$，余り $-x^2+2x+6$

> 【例 5】 4 次式で割る場合の具体例
> $(x^6+x^5-6x^4+6x^3-5)\div(x^4-2x^3+x^2+3)$

下記のようになれば完成です。

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & 1 & -6 & 6 & 0 & 0 & -5 \\
2 & & 2 & 6 & -2 & & & \\
-1 & & & -1 & -3 & 1 & & \\
0 & & & & 0 & 0 & 0 & \\
-3 & & & & & -3 & -9 & 3 \\
\hline
 & 1 & 3 & \multicolumn{1}{r|}{-1} & 1 & -2 & -9 & -2
\end{array}
$$

商 x^2+3x-1，余り x^3-2x^2-9x-2

§4. 係数決定問題への応用

さらに[形式H]で，以下のような整式の除法の係数決定問題を楽に解くことができます。

> 【問 1】 $x^4+ax^3+bx^2-x+2$ を x^2+2x-1 で割ると余りが $x+6$ になるように，定数 a，b の値を求めよ。

(解答) まず，2 つの整式，余りの係数を[形式H]の該当の位置に置きます。

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & a & b & -1 & 2 \\
-2 & & & & & \\
1 & & & & & \\
\hline
 & & & \multicolumn{1}{r|}{} & 1 & 6
\end{array}
$$

次に，下の丸付き数字の順に計算し，値を該当の場所に置けば解けます。

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & a & b & -1 & 2 \\
-2 & & ② & ⑨ & ⑥ & \\
1 & & & ③ & ⑦ & ④ \\
\hline
 & ① & ⑧ & \multicolumn{1}{r|}{⑤} & 1 & 6
\end{array}
$$

$①=1$，$②=①\times(-2)=-2$，$③=①\times1=1$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & a & b & -1 & 2 \\
-2 & & -2 & ⑨ & ⑥ & \\
1 & & & 1 & ⑦ & ④ \\
\hline
 & 1 & ⑧ & \multicolumn{1}{r|}{⑤} & 1 & 6
\end{array}
$$

ここで，1 番右の列に注目して $2+④=6$ より $④=4$，$⑤\times1=④$ より $⑤=4$，$⑥=⑤\times(-2)=-8$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & a & b & -1 & 2 \\
-2 & & -2 & ⑨ & -8 & \\
1 & & & 1 & ⑦ & 4 \\
\hline
 & 1 & ⑧ & \multicolumn{1}{r|}{4} & 1 & 6
\end{array}
$$

$(-1)+(-8)+⑦=1$ より $⑦=10$，
$⑧\times1=⑦$ より $⑧=10$，$⑨=⑧\times(-2)=-20$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & a & b & -1 & 2 \\
-2 & & -2 & -20 & -8 & \\
1 & & & 1 & 10 & 4 \\
\hline
 & 1 & 10 & \multicolumn{1}{r|}{4} & 1 & 6
\end{array}
$$

すると，$a+(-2)=10$，$b+(-20)+1=4$ より $a=12$，$b=23$

> 【問 2】 $x^4+ax^3-x^2+bx+2$ を x^2+2x-1 で割ると余りが $x+6$ になるように，定数 a，b の値を求めよ。

(解答)

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & a & -1 & b & 2 \\
-2 & & ② & ⑦ & ⑥ & \\
1 & & & ③ & ⑨ & ④ \\
\hline
 & ① & ⑧ & \multicolumn{1}{r|}{⑤} & 1 & 6
\end{array}
$$

$①=1$，$②=①\times(-2)=-2$，$③=①\times1=1$

ここで，右から $2+④=6$ より $④=4$，
$⑤\times1=④$ より $⑤=4$，$⑥=⑤\times(-2)=-8$，
$(-1)+⑦+③=⑤$ より $⑦=4$，$⑧\times(-2)=⑦$ より $⑧=-2$，$⑨=⑧\times1=-2$

すると，$a+②=⑧$，$b+⑥+⑨=1$ より
$a=0$，$b=11$

a と b の間が 2 つ以上開くと少し面倒です。

> 【問 3】 $x^4+ax^3-x^2-3x+b$ が x^2-2x+3 で割り切れるように，定数 a，b の値を求めよ。

(解答)

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & a & -1 & -3 & b \\
2 & & ② & ⑤ & ⑧ & \\
-3 & & & ③ & ⑥ & ⑨ \\
\hline
 & ① & ④ & \multicolumn{1}{r|}{⑦} & 0 & 0
\end{array}
$$

$①=1$，$②=①\times2$，$③=①\times(-3)$

ここで，右から値が決まりません。左から文字式を作りながら解きます。

$④=a+②=a+2$，$⑤=④\times2=2a+4$，
$⑥=④\times(-3)=-3a-6$，$⑦=(-1)+⑤+③=2a$，
$⑧=⑦\times2=4a$，$⑨=④\times(-3)=-6a$
すると，$(-3)+⑧+⑥=0$ より $a=9$
この a の値と $b+⑨=0$ より $b=54$

《参考文献》

〔1〕 渡辺一夫「組立除法～2 次以上の整式で割る割り算への拡張と応用」愛教 46 号(愛知県数学教育研究会高等学校部会)p.45～48

(愛知県　名城大学附属高等学校)