連立方程式を解かない解法（ベクトル編）

中原（なかはら） 克芳（かつよし）

§0. 連立方程式とベクトル

本誌 51 号で楠田貴至先生が「連立方程式を解きたくない」と題して，剰余の定理や円・放物線等の 2 次曲線に関する問題の，連立方程式を用いない解法を紹介された。数学ではいかに計算を省略するかが大切なことも多く，楠田先生の研究はその数学の精神に基づいた面白い結果である。それだけではなく，楠田先生自身は「ものぐさ」と謙遜されておられるが，その考察は単に計算を省略するだけに留まらず，数学の本質にまで遡って熟慮されていて，教育的にも優れた内容の研究である。

さて，数学で連立方程式を解かねばならない場面は他にも数多くある。例えば三角形の線分比を求めるために，ベクトルの係数比較を用いる問題もそうである。この問題を連立方程式を使わないだけならば，チェバ・メネラウスの定理を使えばそれで済む。しかしそれでは問題は解けるものの，生徒がベクトルを理解したことにはならない。やはり生徒にはベクトルの価値を知らしめつつ，しかも計算が容易にできる方法を教えるのが教育的というものであろう。そこでここでは連立方程式を解かない解法の「ベクトル編」として，拙案を紹介しよう。

なお，これから紹介する案は最終的な結論だけではなく，一つの結論に至るまでの考え方の道筋をたどってみた。言わば自分なりの試行錯誤の跡でもある。

§1. 典型的な問題

三角形の線分比を求める問題でベクトルを用いるためには，

「3 点 P，Q，R が一直線上にあり，

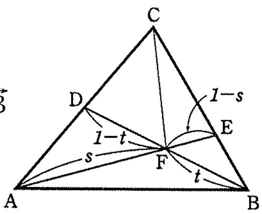
$\overrightarrow{OR}=s\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OQ}$ と表されるとき，

$s+t=1$ である」 …①

という性質を利用する。その典型的な問題は次の（例 1）であり，どの教科書にも掲載されている高校生にとって必修の問題である。

> **（例 1）** △ABC において，CA の中点を D，CB を 2：1 に内分する点を E とする。AE と BD の交点を F とするとき，$\overrightarrow{CF}$ を $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$ で表せ。

［教科書風の解（解 1）］ $AF:FE=s:(1-s)$，$BF:FD=t:(1-t)$ とおくと，3 点 A，F，E が同一直線上にあることから，



$$\overrightarrow{CF}=(1-s)\overrightarrow{CA}+s\overrightarrow{CE}$$
$$=(1-s)\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}s\overrightarrow{CB}$$

また 3 点 B，F，D が同一直線上にあることから，

$$\overrightarrow{CF}=t\overrightarrow{CD}+(1-t)\overrightarrow{CB}$$
$$=\frac{1}{2}t\overrightarrow{CA}+(1-t)\overrightarrow{CB}$$

のように，$\overrightarrow{CF}$ を 2 つのベクトル $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$ を用いて 2 通りに表すことができる。$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$ は一次独立であるから係数比較して，

$$1-s=\frac{1}{2}t,\quad \frac{2}{3}s=1-t$$

これらを解いて $s=\frac{3}{4}$，$t=\frac{1}{2}$

$$\therefore\quad \overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\quad（終）$$

この解法では，異なる 2 つの 3 点の組 {A，F，E}，{B，F，D} がそれぞれ別の同一直線上にあることから，2 つのベクトル方程式を立てることにより，係数を比較することができた。

§2. 位置ベクトル

先の例題の連立方程式は，生徒が意外によく間違える。その理由としては，昨今の教育状況により生徒の計算力が弱くなったこともあるだろうが，連立方程式そのものにも原因がありそうである。それは

係数が分数であることや，未知数が両辺に分かれていること等から，式変形の途中で混乱するようである。

そこでまずはもう少し式変形しやすくできないかを考えてみた。すると位置ベクトルによる解法を思いついた。それは次のとおりである。

[解２]　先の解と同様に，AF：FE$=s:(1-s)$，BF：FD$=t:(1-t)$ とおく。また原点Oをとり，３点A，B，Cの位置ベクトルをそれぞれ$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$とすると，３点A，F，Eが同一直線上にあることから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}}&=(1-s)\vec{a}+s\overrightarrow{\mathrm{OE}}\\&=(1-s)\vec{a}+s\cdot\frac{1}{3}(2\vec{b}+\vec{c})\\&=(1-s)\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{b}+\frac{s}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

また３点B，F，Dが同一直線上にあることから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}}&=t\overrightarrow{\mathrm{OD}}+(1-t)\vec{b}\\&=\frac{1}{2}t(\vec{a}+\vec{c})+(1-t)\vec{b}\\&=\frac{1}{2}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\frac{1}{2}t\vec{c}\end{aligned}$$

とできる。これらの係数を比較して，

$$1-s=\frac{1}{2}t,\quad \frac{2}{3}s=1-t,\quad \frac{s}{3}=\frac{1}{2}t$$

この連立方程式を解くとき，３番目の式がある分，変形がしやすいようである。実際，$s=\frac{3}{2}t$ として２番目の式に代入すれば，$2t=1$ より $t=\frac{1}{2}$ が容易に得られる。

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

ここで原点OをCにとれば，$\vec{c}=\vec{0}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CB}}\quad（終）$$

この解法の長所は，辺の比がどのように与えられても立式が容易なことである。また３つの式から２つを取り出して連立方程式を解けば良いので，方程式も解きやすくなる。ただし別の問題がある。それは下線部の係数比較をどのように説明（答案での記述）すれば良いか，である。「一次独立」は学習指導要領には記載されていない用語であるし，またこの場合にふさわしいと言えるであろうか。ただ今思案中であるので，良い案があれば教えていただきたい。

§3. 連立方程式を用いない工夫

次にチェバ(Ceva，1647～1734)・メネラウス(Menelaus，紀元100年頃)の定理を授業で説明していたときに，少し式変形を工夫することによって，連立方程式を用いない次の方法を思いついた。これは事前に，一直線上の３点をベクトルで表すときは係数の和が１になることを強調して授業をしたことも背景にある。

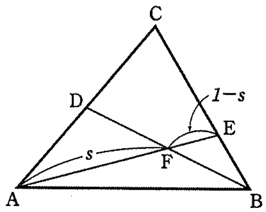
[解３]　３点A，F，Eは同一直線上にあるので，AF：FE$=s:(1-s)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CF}}&=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+s\overrightarrow{\mathrm{CE}}\\&=(1-s)\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{CD}}+s\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}\end{aligned}$$

ここで，３点B，F，Dも（別の）同一直線上にあることから，

$$2(1-s)+\frac{2}{3}s=1$$

$$\therefore\quad s=\frac{3}{4}\quad（以下略）$$



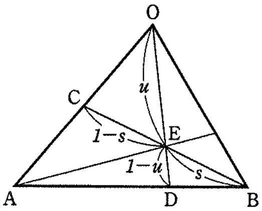
この解法では，まず３点A，F，Eが同一直線上にあることを利用してベクトル方程式を立て，３点B，F，Dが（別の）同一直線上にあることを利用して，同じ方程式を別の視点から見るというようにして解いている。このように一つの式を様々な視点から捉えることが，数学的な感性を養うことにつながると思われる。

さて，この方法では連立（２元）方程式を解く必要はなくなったが，（１元）方程式はやはり解かねばならない。しかも解法の原理はほぼ同じなので，この程度の別解であれば，かえって立式が容易な連立方程式に軍配を上げる者の方が多いかもしれない。それでは折角の工夫も「策士策に溺れる」の感が免れない。やはり追求すべきは方程式そのものを解くことを回避することである。しかしそんな都合の良いことが果たして可能であろうか。そのヒントは類似の問題にあった。その問題について，次の節で考えてみよう。

§4. 類似の問題

前節のようなことを考えているときに，思い出したのが次の例題である。これは(例１)に類似の問題であり，どちらかと言えば(例１)よりも易しめとも思われるが，２つのベクトルが対等でないため，パターンにとらわれすぎた生徒には却って難しく感じられることもあるようである。

> (例２)　△OAB において，OA の中点を C，AB を２：１に内分する点をＤとする。OD と BC の交点をＥとするとき，$\overrightarrow{OE}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ で表せ。



[教科書風の解]　BE：EC$=s:(1-s)$，
OE：ED$=u:(1-u)$ とおくと，

$$\overrightarrow{OE}=s\overrightarrow{OC}+(1-s)\overrightarrow{OB}$$
$$=\frac{1}{2}s\overrightarrow{OA}+(1-s)\overrightarrow{OB}$$

また $\overrightarrow{OE}=u\overrightarrow{OD}=u\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)$，

$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ が一次独立より係数比較して，

$$\frac{1}{2}s=\frac{1}{3}u,\quad 1-s=\frac{2}{3}u$$

これらを解いて $s=\frac{1}{2}$，$u=\frac{3}{4}$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

この問題を先の[解３]のように，３点 C，E，B が同一直線上にあることを利用して解くとどうなるであろうか。計算してみよう。

[例２の別解]

$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 2\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$$
$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB})$$

この式は，OD と BC の交点Ｅは BC の中点であり，かつ OE：OD=3：4 であることを示している。

$$\therefore\quad \overrightarrow{OE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OD}=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

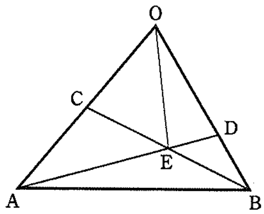
何と，このようにすれば(例２)は連立方程式どころか，方程式すら解かなくとも解が得られるではないか。この方法を使えば(例１)も方程式を解かずに済むのではないだろうか。次の節で考えてみよう。

§5. 方程式を解かない解法

(例２)を参考にして，(例１)をベクトルの始点(視点？)を変えて考えてみた。すると次の方法で解けることがわかったのである。

[例１の解４]　点Ａを始点と見ると，３点 O，D，B は一直線上にあるから，

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO})$$
$$=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})$$
$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$
$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$



この式は，AD と BC の交点Ｅは BC の中点である(かつ AE：ED=3：1)であることを示している。すなわち，

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB})$$

であるから，$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ と合わせて，

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

が得られる。

この方法によって，ついに(例１)を方程式を使わずに解くことができた。

最初に書いたように，思考の順を追って書いたので，回りくどいと思われる方もおられるだろうが，その苦労を汲み取っていただければ幸いに思う。

(広島県　広島女学院高等学校)