正弦・余弦の3倍角の公式の幾何的証明 $\sum_{k=1}^{n} ka_k$ を求めるための手法

大塚（おおつか） 秀幸（ひでゆき）

■正弦・余弦の3倍角の公式の幾何的証明

§1. はじめに

三角比の3倍角の公式は，2倍角の公式と加法定理から得られる。本稿では，2倍角の公式も加法定理も使うことなく，三角比の定義にもとづき，図形を使って3倍角の公式を導く方法を紹介する。なお，2倍角の公式の幾何的証明はいくつか知られているので本稿では割愛する。

§2. 正弦・余弦の3倍角の公式の幾何的証明

正弦・余弦の3倍角の公式を図形を使って証明しよう。

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$
$\cos 3\theta = -3\cos\theta + 4\cos^3\theta$

(証明)

下の図のように，

$AB=AC=1$，$\angle BAC=2\theta$，

$\angle CAD=\theta$，$\angle ADB=90°$

となる図形を用意する。

また，AC，BD の交点を F とする。

すると，

$AD=AB\times\cos 3\theta=\cos 3\theta$ ……①

$BD=AB\times\sin 3\theta=\sin 3\theta$ ……②

ところで，△BCF について3つの内角の大きさを求めると，頂角が $\angle CBF=2\theta$ の二等辺三角形であることがわかる。

よって，

$BF=BC=AB\times\sin\theta\times 2=2\sin\theta$

$CF=BC\times\sin\theta\times 2=4\sin^2\theta$

すると，

$AF=1-CF=1-4\sin^2\theta$

$AD=AF\times\cos\theta=(1-4\sin^2\theta)\cos\theta$

$=-3\cos\theta+4\cos^3\theta$ ……③

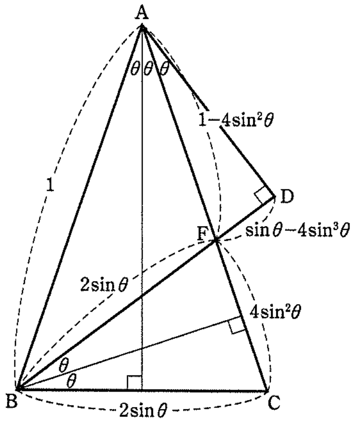
$FD=AF\times\sin\theta=(1-4\sin^2\theta)\sin\theta$

$=\sin\theta-4\sin^3\theta$

$BD=BF+FD=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ ……④

∴ ②④より $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

①③より $\cos 3\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta$ ■



§3. おわりに

三角比の2倍角の公式の幾何的証明がいくつか知られているとはじめに述べたが，以下の参考文献に詳しく紹介されている。しかし，3倍角の公式の幾何的証明は見たことがなかったので，自分で作り今回の報告に至った。

《参考文献》

〔1〕 Roger B. Nelsen 著 (秋山仁・奈良知恵・酒井利訓 訳)「証明の展覧会 I，II」東海大学出版会

■$\sum_{k=1}^{n} ka_k$ を求めるための手法

§1. はじめに

$\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}$ を求めるという典型的な問題があるが，これについては例えば和を S とおき，$S-rS$ を計算することでうまく導くことができる。それでは，r^{k-1} の部分を一般的な数列 a_k と置き換えた場合はどうであろうか。

本稿の目的は，$\sum_{k=1}^{n} a_k$ の結果を利用して $\sum_{k=1}^{n} ka_k$ を求めることである。

§2. $\sum_{k=1}^{n} ka_k$ を導く公式

以下の定理は非常に有効である。

（定理） $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とすると

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k=nS_n-\sum_{k=1}^{n-1} S_k$$

（証明） 以下の n 個の式を用意する。

$$S_1=a_1$$
$$S_2=a_1+a_2$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3$$
$$\cdots$$
$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

以上の両辺をそれぞれ加えると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} S_k&=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k\\&=(n+1)\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n} ka_k\\&=nS_n+S_n-\sum_{k=1}^{n} ka_k\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n} ka_k=nS_n-\sum_{k=1}^{n-1} S_k \quad ■$$

原理的にはこの定理を繰り返し用いることで，$\sum_{k=1}^{n} k^2a_k$, $\sum_{k=1}^{n} k^3a_k$, $\sum_{k=1}^{n} k^4a_k$, … を導くこともできる。

§3. 定理をつかった例

次にこの定理を使った例を示そう。

(1) $\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}$ の計算

はじめに述べたようにこれは典型的な問題であるが，先の定理をつかうと $S-rS$ 法よりもスッキリと導くことができる。

（例）
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^{k-1}&=n\times\frac{3^n-1}{2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3^k-1}{2}\\&=\frac{n\cdot 3^n-n}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{3(3^{n-1}-1)}{2}\\&\qquad+\frac{1}{2}(n-1)\\&=\frac{n\cdot 3^n-n}{2}-\frac{3^n-3}{4}+\frac{n-1}{2}\\&=\frac{(2n-1)3^n+1}{4}\end{aligned}$$

(2) 自然数の累乗和

定理において，以下のように $a_k=1$ や $a_k=2k-1$ とすると，自然数の和や平方和を求めることができる。

（例） $a_k=1$ とおくと $\sum_{k=1}^{n} 1=n$ より

$$\sum_{k=1}^{n} k=n\times n-\sum_{k=1}^{n-1} k=n^2-\sum_{k=1}^{n} k+n$$

整理して　$2\sum_{k=1}^{n} k=n(n+1)$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

（例） $a_k=2k-1$ とおくと $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ より

$$\sum_{k=1}^{n} k(2k-1)=n\times n^2-\sum_{k=1}^{n-1} k^2=n^3-\sum_{k=1}^{n} k^2+n^2$$

整理して $3\sum_{k=1}^{n} k^2=n^3+n^2+\sum_{k=1}^{n} k$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{k=1}^{n} k^2&=\frac{1}{3}\left(n^3+n^2+\frac{n(n+1)}{2}\right)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

※ $a_k=k$ とおいても平方和を導くことはできるが上記の方が簡単！

§4. おわりに

例えば，$\sum_{k=0}^{n} k_n\mathrm{C}_k$ については，$\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k=2^n$ を利用して定理にあてはまれば導けそうに見えるが，実はこのような場合に定理は適用できない。なぜならば，a_k にあたる部分が k の他に n にも依存しているからだ。十分に注意が必要である。

さらに，どのような応用があるかを考えてみるのも面白いと思う。

（東京都　元文教大学付属高等学校）