平面が立体に大爆発 !?
パズル “Square-CUBE”

近藤(こんどう)　寛直(ひろなお)

§1. はじめに

$$1^2=1^3$$
$$(1+2)^2=1^3+2^3$$
$$(1+2+3)^2=1^3+2^3+3^3$$
$$(1+2+3+4)^2=1^3+2^3+3^3+4^3$$
$$\vdots$$

1からnまでの連続した整数を，足してから2乗した場合と，3乗してから足した場合とで，同じ数値になる。

書き方を変えられると気づかないことが多いが，

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

と，高校で習う公式である。それにしても，“和の2乗”が“3乗の和”になるというのは偶然にしては出来過ぎていないだろうか。

高校の教科書では，恒等式を利用して

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

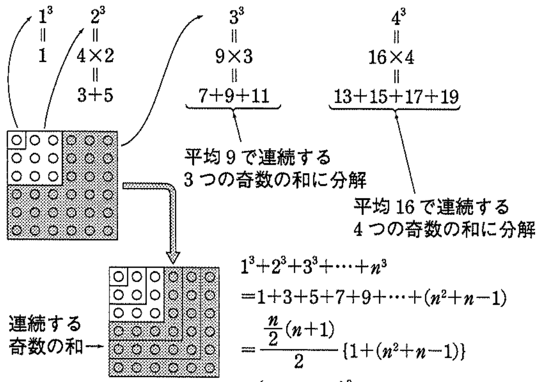
を導き出しているが，図形を変形して一目瞭然の鮮やかな方法があるに違いないと思って考えた。

§2. $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\sum_{k=1}^{n} k\right\}^2$ の証明法

そもそも，$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\sum_{k=1}^{n} k\right\}^2$ の証明について調べてみると，意外と種類が多いことがわかった。まず，それらを紹介する。

連続する奇数の和に変形する方法

1つ目はn^3が連続するn個の奇数の和になることを利用する方法である。



$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$
$$=1+3+5+7+9+\cdots+(n^2+n-1)$$
$$=\frac{\frac{n}{2}(n+1)}{2}\{1+(n^2+n-1)\}$$
$$=\left\{\frac{n}{2}(n+1)\right\}^2$$

(参考文献〔2〕$p.105$による)

九九の表を利用する方法

九九の表を利用するというユニークな方法もある。

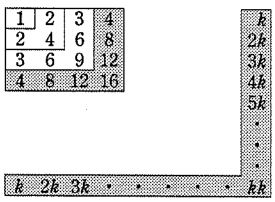
①九九の表を横に足した後，縦に足した場合

					和
1	2	3	4	→	1+2+3+4
2	4	6	8	→	2(1+2+3+4)
3	6	9	12	→	3(1+2+3+4)
4	8	12	16	→	4(1+2+3+4)

↓和

$\underline{(1+2+3+4)(1+2+3+4)}$

②九九の表をL字型に足した後，斜めに足した場合



k番目のL字型について和を求めると

$$2(k+2k+3k+\cdots\cdots+k^2)-k^2$$
$$=2\cdot\frac{k}{2}(k+k^2)-k^2=k^3$$

(参考文献〔1〕$p.14, 15$による)　$\underline{1^3+2^3+3^3+4^3}$

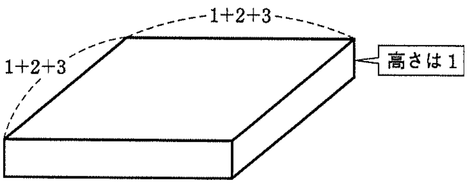
九九の表に並ぶ数字を横に足した後，縦に足すと，和の2乗になり，図のように，L字型に区切って和を求めると，k番目のL字型の中の和がk^3になることがわかる。
注）図は4の段までで行っているが，何段まででも可能であることがわかるだろう。

§3. Square-CUBE

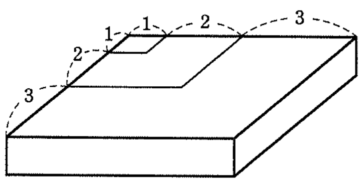
今回，私はそれらと違うアプローチ“2乗を正方形の面積，3乗を立方体の体積に対応させる”方法を考えた。

結果，思いついたものが，次のパズルSquare-CUBE（と勝手に名付けてみた。）である。

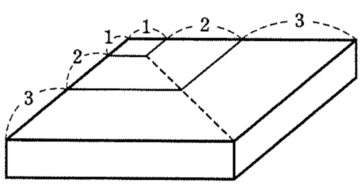
1辺の長さが$1+2+3$の正方形を考える。そして，それを底面に，高さを1にして四角柱をつくる。



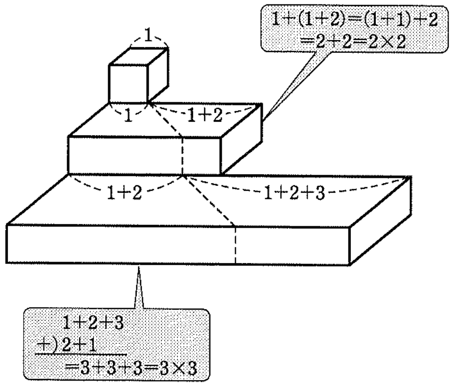
この正四角柱の板を，次のようにカットする。



さらに，斜めにカットし，

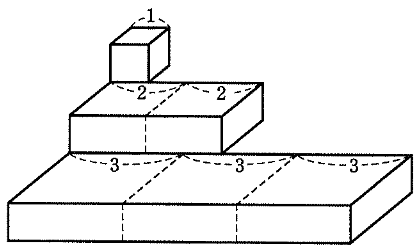


それぞれ台形を次のように組合せる。

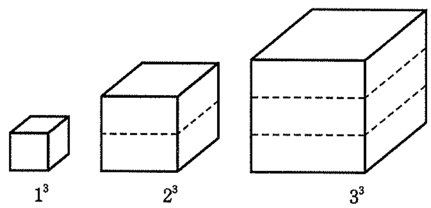


そうして出来た1本1本の帯の長さを考えると，幅が2のものは$1+(1+2)=(1+1)+2=2+2=2\times 2$，幅が3のものは$1+2+(1+2+3)=(1+2)+(2+1)+3=3+3+3=3\times 3$になっている。この計算方法に従えば，$n$まででも同様に，一般性のある説明が出来る。

これらを，つぎのようにカットして，



積み上げれば，立方体が出来上がる。

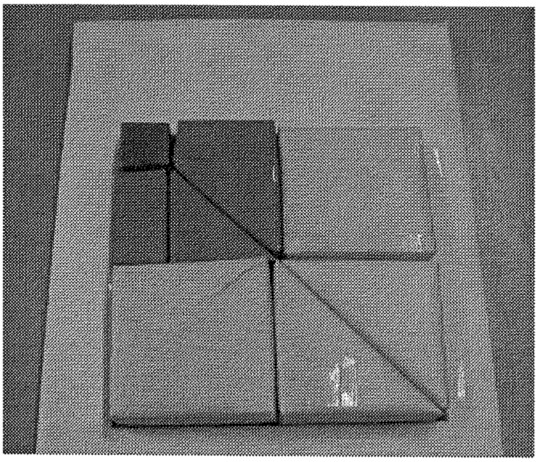


§4. まとめ

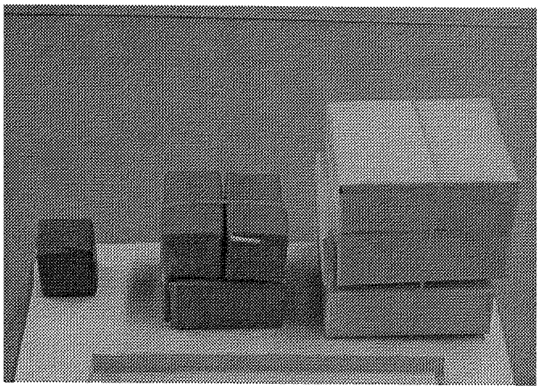
このように問題や数式を見て具体的なイメージができると数学が楽しくなってくる。

以下は実際に作成したものである。

正方形の板が，



立方体に…!?大爆発!?



《参考文献》

〔1〕 大数学者に学ぶ入試数学ＩＡ 監修：秋山仁 数研出版

〔2〕 世にも美しい数学入門 藤原正彦／小川洋子 ちくまプリマー新書

(大阪府立岸和田高等学校)