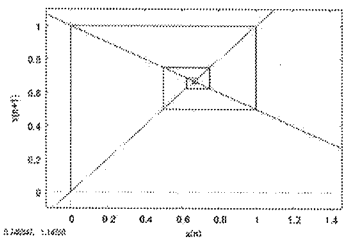
漸化式を目で見る

石野(いしの)　吉宏(よしひろ)

§1. 数学ソフトと漸化式

Maxima というフリーの数学ソフトがありまして，隣接2項間漸化式を入力すると，その極限の様子をグラフ化してくれます。

例えば $a_1=0,\ a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+1$



staircase (階段) という名前の命令です。グラフ電卓 VOYAGE にも同様な機能があって web (クモの巣) という命令です。名前がなかなか面白いです。

隣接3項間漸化式で，これをやろうと思いました。

$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ の一般項は $x^2-px-q=0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると (重解のときは γ)

$a_n=\dfrac{1}{\beta-\alpha}\{(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}-(a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1}\}$　あるいは，$a_n=a_1\gamma^{n-1}+(n-1)(a_2-\gamma a_1)\gamma^{n-2}$　これは参考書にあるとおり。

これで，極限値があるのは，特性方程式の解の両方とも絶対値が1より小 (0に収束) か，解のひとつが1でもうひとつの解の絶対値が1より小のとき $\left(\text{極限値は } \beta=1 \text{ として } \dfrac{a_2-\alpha a_1}{1-\alpha}\right)$ か，ということが分かる。

§2. 特性方程式と漸化式

さて，こいつを目で見るには，$(a_1,\ a_2)$ が初期値なので平面上の点の移動としてみるのがいいだろう。しかも線形だ，漸化式を行列表示にしてやろうという発想がわく。

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

行列の n 乗だから固有値を計算することになって，これが $x^2-px-q=0$ の解となる。行列の形から固有ベクトルも簡単に出る。固有ベクトルで行列は対角化可能なので，固有方程式の解が $\alpha,\ \beta$ とすると (重解のときは γ),

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$ を使い

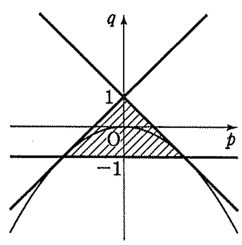
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=\frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} \alpha^n-\beta^n & -\alpha^n\beta+\alpha\beta^n \\ \alpha^{n-1}-\beta^{n-1} & -\alpha^{n-1}\beta+\alpha\beta^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

あるいは，

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\gamma & -\gamma^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n\gamma^{n-1} & -(n-1)\gamma^n \\ (n-1)\gamma^{n-2} & -(n-2)\gamma^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

で，上と同じ結果となる。

さあ，目的のこいつを目で見よう。使うソフトはファンクション・ビュー。



ちょっと周辺の話題をかくと，$p,\ q$ については右図の斜線の部分が0に収束するところ。ただし，境界を除く。

境界 $p+q=1,\ 0<p<2$ の部分は0以外の収束値をもつところ。

斜線部の放物線より上は特性方程式が実数解をもつところ。放物線上は重解をもつところ。斜線部の放物線より下は虚数解をもつところ。ここは行列の標準化が回転行列になる，つまり回転しながら0に収束する。

漸化式を変形して $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=p\dfrac{a_{n+1}}{a_n}+q$,

さらに $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=p\dfrac{a_{n+1}}{a_n}+q$ として数列の隣との比が収束すれば，$x^2-px-q=0$（この方程式はもう3回目の登場）の解である。

下の例の最後のフィボナッチ数列は，特性方程式の解が $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ なので，比は大きい方に収束する。軌跡が $y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x$ なる直線に近づいてゆく。

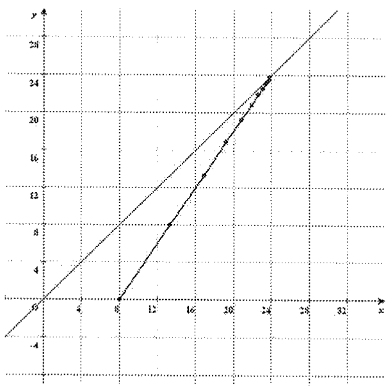
§3. 漸化式を目でみる

最後の例を除いて $a_1=0$，$a_2=8$ とした。

タイプ1　1つの解が1のとき，固有ベクトル(1，1)にもう1つの固有ベクトルにそって収束する。

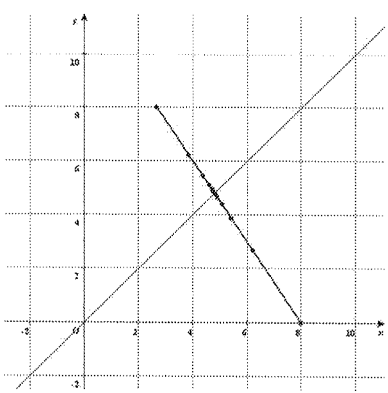
$p=\dfrac{5}{3}$，$q=-\dfrac{2}{3}$ つまり $\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\beta=1$

固有ベクトルは $\left(\dfrac{2}{3},\ 1\right)/\!/(2,\ 3)$



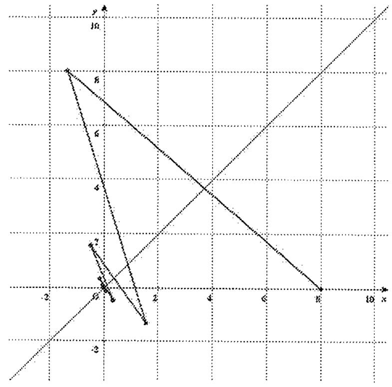
$p=\dfrac{1}{3}$，$q=\dfrac{2}{3}$ つまり $\alpha=-\dfrac{2}{3}$，$\beta=1$

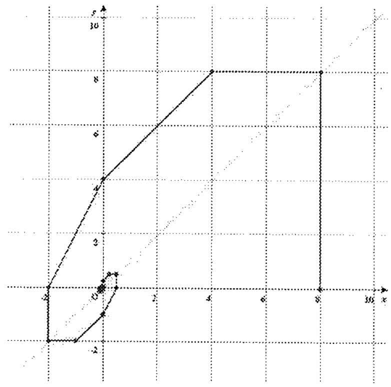
固有ベクトルは $\left(-\dfrac{2}{3},\ 1\right)/\!/(2,\ -3)$



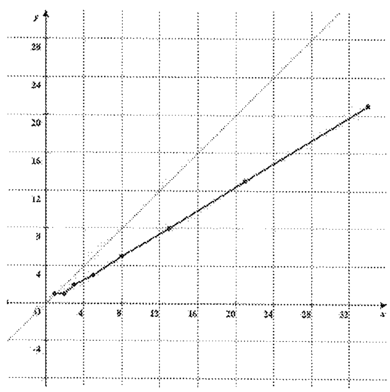
タイプ2　0に収束する。下の固有値は虚数。

$p=-\dfrac{1}{6}$，$q=\dfrac{1}{6}$ つまり $\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\beta=\dfrac{1}{3}$





タイプ3　$p=1$，$q=1$ フィボナッチの数列。



ファンクション・ビューは元群馬県の高等学校の和田啓助先生のソフトです。

Maximaを高校生に使ってもらおうとホームページを公開しています。興味ある方は http://www.max.hi-ho.ne.jp/shizuka/ をどうぞ。

（長野県　長野高等学校）