隣接４項間漸化式の一般項について

久末（ひさすえ）　正樹（まさき）

§0. はじめに

隣接３項間漸化式 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ の一般項は数学Ｂの数列で学ぶようによく知られている。その一方，隣接４項間漸化式に関しては大学入試にはめったに出題されることはないが，隣接３項間漸化式と同様の解法で求めることができる。そこで，

$$a_{n+3}+pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

の一般項を３×３行列を利用して具体的に表すことにする。３次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ の解を $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とする。

§1. α，β，γ がすべて異なるとき

解と係数の関係より $\alpha+\beta+\gamma=-p$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$，$\alpha\beta\gamma=-r$ であるから $(*)$ は

$$a_{n+3}-(\alpha+\beta+\gamma)a_{n+2}+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)a_{n+1}-\alpha\beta\gamma a_n=0$$

と表すことができる。この左辺を次のように変形する。

$$\begin{aligned}&a_{n+3}-(\alpha+\beta+\gamma)a_{n+2}+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)a_{n+1}-\alpha\beta\gamma a_n\\&=a_{n+3}-(\alpha+\beta)a_{n+2}+\alpha\beta a_{n+1}-\gamma\{a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n\}\end{aligned}$$

であるから

$$a_{n+3}-(\alpha+\beta)a_{n+2}+\alpha\beta a_{n+1}=\gamma\{a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n\}$$

が成り立つ。これを繰り返すことにより，

$$\begin{aligned}&a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n\\&=\gamma^{n-1}\{a_3-(\alpha+\beta)a_2+\alpha\beta a_1\} \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

となる。α，β，γ を順に入れ替えることにより

$$\begin{aligned}&a_{n+2}-(\beta+\gamma)a_{n+1}+\beta\gamma a_n\\&=\alpha^{n-1}\{a_3-(\beta+\gamma)a_2+\beta\gamma a_1\} \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&a_{n+2}-(\gamma+\alpha)a_{n+1}+\gamma\alpha a_n\\&=\beta^{n-1}\{a_3-(\gamma+\alpha)a_2+\gamma\alpha a_1\} \quad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

が得られる。さらに①－②より

$$\begin{aligned}(\gamma-\alpha)a_{n+1}-\beta(\gamma-\alpha)a_n=&\gamma^{n-1}\{a_3-(\alpha+\beta)a_2+\alpha\beta a_1\}\\&-\alpha^{n-1}\{a_3-(\beta+\gamma)a_2+\beta\gamma a_1\} \quad \cdots\cdots ④\end{aligned}$$

②－③より

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)a_{n+1}-\gamma(\alpha-\beta)a_n=&\alpha^{n-1}\{a_3-(\beta+\gamma)a_2+\beta\gamma a_1\}\\&-\beta^{n-1}\{a_3-(\gamma+\alpha)a_2+\gamma\alpha a_1\} \quad \cdots\cdots ⑤\end{aligned}$$

が得られる。④，⑤より

$$a_n=\frac{\Phi(\alpha,\beta,\gamma)+\Phi(\beta,\gamma,\alpha)+\Phi(\gamma,\alpha,\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$

となり，これが一般項である。ただし，

$\Phi(x,y,z)=(x-y)z^{n-1}(a_3-(x+y)a_2+xya_1)$

と定義する。ここでこの式を整理してみよう。

$$\boxed{a_n=\frac{1}{\varDelta}(\alpha^n\ \ \beta^n\ \ \gamma^n)\begin{pmatrix}\beta^2\gamma^2(\beta-\gamma) & -\beta\gamma(\beta^2-\gamma^2) & \beta\gamma(\beta-\gamma)\\ \gamma^2\alpha^2(\gamma-\alpha) & -\gamma\alpha(\gamma^2-\alpha^2) & \gamma\alpha(\gamma-\alpha)\\ \alpha^2\beta^2(\alpha-\beta) & -\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2) & \alpha\beta(\alpha-\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}}$$

である。ただし $\varDelta=\alpha\beta\gamma(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$。以上より，$\{a_n\}$ の一般項を得る。

一方，次のように解釈することもできる。３次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ の解 $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は $\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=0$ などを満たす。ここで $a_n=\alpha^n$ を $(*)$ の左辺に代入すると

$$\alpha^{n+3}+p\alpha^{n+2}+q\alpha^{+1}+r\alpha^n=\alpha^n(\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r)=0$$

であるから $a_n=\alpha^n$ は漸化式の解のひとつである。同様に $a_n=\beta^n$，γ^n も解であるから，

$$a_n=\lambda_1\alpha^n+\lambda_2\beta^n+\lambda_3\gamma^n=(\alpha^n\ \ \ \beta^n\ \ \ \gamma^n)\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}$$

の形で一意的に書ける。ここで λ_1，λ_2，λ_3 は $a_n=\lambda_1\alpha^n+\lambda_2\beta^n+\lambda_3\gamma^n$ に $n=1,\ 2,\ 3$ を代入してできる連立方程式 $\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\\alpha^2&\beta^2&\gamma^2\\\alpha^3&\beta^3&\gamma^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ の解であるから，$\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\\alpha^2&\beta^2&\gamma^2\\\alpha^3&\beta^3&\gamma^3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ となり，

$\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\\alpha^2&\beta^2&\gamma^2\\\alpha^3&\beta^3&\gamma^3\end{pmatrix}^{-1}$ を計算すると

$$\frac{1}{\varDelta}\begin{pmatrix}\beta^2\gamma^2(\beta-\gamma) & -\beta\gamma(\beta^2-\gamma^2) & \beta\gamma(\beta-\gamma)\\ \gamma^2\alpha^2(\gamma-\alpha) & -\gamma\alpha(\gamma^2-\alpha^2) & \gamma\alpha(\gamma-\alpha)\\ \alpha^2\beta^2(\alpha-\beta) & -\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2) & \alpha\beta(\alpha-\beta)\end{pmatrix}$$

に等しくなるので，これによっても一般項が得られる。

§2. 解が $x=\alpha$ の3重解のとき

§1と同様の議論で

$$a_{n+2}-2\alpha a_{n+1}+\alpha^2 a_n=\alpha^{n-1}(a_3-2\alpha a_2+\alpha^2 a_1) \quad \cdots⑥$$

が得られる。また左辺は

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}-\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と変形でき，⑥の両辺を α^{n+2} で割ると

$$\frac{a_{n+2}-\alpha a_{n+1}}{\alpha^{n+2}}-\frac{a_{n+1}-\alpha a_n}{\alpha^n}=\frac{a_3-2\alpha a_2+\alpha^2 a_1}{\alpha^3}$$

となるので $\left\{\dfrac{a_{n+1}-\alpha a_n}{\alpha^n}\right\}$ は等差数列であり，その一般項は

$$\frac{a_{n+1}-\alpha a_n}{\alpha^{n+1}}=\frac{a_2-\alpha a_1}{\alpha^2}+\frac{(n-1)(a_3-2\alpha a_2+\alpha^2 a_1)}{\alpha^3}$$

$$=\frac{\alpha a_2-a_3}{\alpha^3}+\frac{a_3-2\alpha a_2+\alpha^2 a_1}{\alpha^3}n$$

である。この左辺は $\dfrac{a_{n+1}-\alpha a_n}{\alpha^{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}}-\dfrac{a_n}{\alpha^n}$ であるから，階差数列を利用して

$$\frac{a_n}{\alpha^n}=\frac{a_1}{\alpha}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\alpha a_2-a_3}{\alpha^3}+\frac{a_3-2\alpha a_2+\alpha^2 a_1}{\alpha^3}k\right)$$

$$=\frac{a_1}{\alpha}+\frac{(\alpha a_2-a_3)(n-1)}{\alpha^3}+\frac{(a_3-2\alpha a_2+\alpha^2 a_1)n(n-1)}{2\alpha^3}$$

$$=\frac{1}{\alpha^3}\left\{\frac{(n^2-5n+6)\alpha^2 a_1}{2}+(-n^2+4n-3)\alpha a_2+\frac{n^2-3n+2}{2}a^3\right\}$$

よって

$$a_n=\frac{\alpha^n}{2\alpha^3}\begin{pmatrix}(n-2)(n-3)\alpha^2 & -2(n-1)(n-3)\alpha & (n-1)(n-2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$$

を得るが，これを次のように変形する。

$$\begin{pmatrix}(n-2)(n-3)\alpha^2 & -2(n-1)(n-3)\alpha & (n-1)(n-2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & n & n^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\alpha^2 & -6\alpha & 2\\ -5\alpha^2 & 8\alpha & -3\\ \alpha^2 & -2\alpha & 1\end{pmatrix}$$ となるから，

$$\boxed{a_n=\frac{1}{2\alpha^3}\begin{pmatrix}\alpha^n & n\alpha^n & n^2\alpha^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\alpha^2 & -6\alpha & 2\\ -5\alpha^2 & 8\alpha & -3\\ \alpha^2 & -2\alpha & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}}$$

を得る。一方，$\begin{pmatrix}\alpha & \alpha & \alpha\\ \alpha^2 & 2\alpha^2 & 2^2\alpha^2\\ \alpha^3 & 3\alpha^3 & 3^2\alpha^2\end{pmatrix}$ の逆行列は

$$\frac{1}{\alpha^3}\begin{pmatrix}3\alpha^2 & -3\alpha & 1\\ -\frac{5}{2}\alpha^2 & 4\alpha & -\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\alpha^2 & -\alpha & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ であり，

$$a_n=\begin{pmatrix}\alpha^n & n\alpha^n & n^2\alpha^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \alpha & \alpha\\ \alpha^2 & 2\alpha^2 & 2^2\alpha^2\\ \alpha^3 & 3\alpha^3 & 3^2\alpha^3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$$ を得る。

§3. 解が $x=\alpha,\beta,\beta$ の2重解のとき $(\alpha\fallingdotseq\beta)$

①，②と同様に

$$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n$$

$$=\beta^{n-1}\{a_3-(\alpha+\beta)a_2+\alpha\beta a_1\},$$

$$a_{n+2}-2\beta a_{n+1}+\beta^2 a_n=\alpha^{n-1}(a_3-2\beta a_2+\beta^2 a_1)$$

が得られ，これらの差をとることにより

$$a_{n+1}-\beta a_n$$

$$=\frac{(-a_3+2\beta a_2+\beta^2 a_1)\alpha^{n-1}+(a_3-(\alpha+\beta)a_2+\alpha\beta a_1)\beta^{n-1}}{\beta-\alpha}$$

となる。両辺を β^{n+1} で割って§2と同様の計算で

$$\boxed{a_n=\frac{1}{\Lambda}\begin{pmatrix}\alpha^n & \beta^n & n\beta^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta^4 & -2\beta^3 & \beta^3\\ \alpha^2\beta(2\alpha-3\beta) & -\alpha(\alpha^2-3\beta^2) & \alpha(\alpha-2\beta)\\ -\alpha^2\beta(\alpha-\beta) & \alpha(\alpha^2-\beta^2) & -\alpha(\alpha-\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}}$$

を得る。ただし $\Lambda=\alpha\beta^2(\alpha-\beta)^2$。一方，

$\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \beta\\ \alpha^2 & \beta^2 & 2\beta^2\\ \alpha^3 & \beta^3 & 3\beta^3\end{pmatrix}$ の逆行列は

$$\frac{1}{\alpha\beta^2(\alpha-\beta)^2}\begin{pmatrix}\beta^4 & -2\beta^3 & \beta^3\\ \alpha^2\beta(2\alpha-3\beta) & -\alpha(\alpha^2-3\beta^2) & \alpha(\alpha-2\beta)\\ -\alpha^2\beta(\alpha-\beta) & \alpha(\alpha^2-\beta^2) & -\alpha(\alpha-\beta)\end{pmatrix}$$

であるから，一般項は次の形でも書ける。

$$a_n=\begin{pmatrix}\alpha^n & \beta^n & n\beta^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \beta\\ \alpha^2 & \beta^2 & 2\beta^2\\ \alpha^3 & \beta^3 & 3\beta^3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$$

§4. 具体例

最後に，具体例として次の漸化式

$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=2$，$a_{n+3}-3a_{n+1}+2a_n=0$

の一般項を求めよう。$x^3-3x+2=0$ の解は $x=-2$，1 (重解) であるから，§3型で $\alpha=-2$，$\beta=1$ の場合である。$\Lambda=-18$ で，

$$a_n=\frac{1}{\Lambda}\begin{pmatrix}\alpha^n & \beta^n & n\beta^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta^4 & -2\beta^3 & \beta^2\\ \alpha^2\beta(2\alpha-3\beta) & -\alpha(\alpha^2-3\beta^2) & \alpha(\alpha-2\beta)\\ -\alpha^2\beta(\alpha-\beta) & \alpha(\alpha^2-\beta^2) & -\alpha(\alpha-\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{18}\begin{pmatrix}(-2)^n & 1 & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -28 & 2 & 8\\ 12 & -6 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{(-2)^{n-1}+3n+5}{9}$$ となる。

(岐阜県立山県高等学校)