# 3次元空間における1次変換による不動直線[II]

石濱（いしはま）　文武（ふみたけ）

## §1. 定理

$A$を実数成分3次正方行列，$E$を3次単位行列とし，ベクトルはすべて実数成分3次列ベクトルとして，$\vec{0}$を零ベクトルとする。その他の用語は筆者の前稿[I]と同じとする。本稿の主定理は[定理1]，[定理2]で，その他の[命題]は主定理の証明に用いられる。なお，[証明]を簡潔にするために前稿[I]から容易に類推できることは説明を省いてある。

> **[定理1]** $A$が表す1次変換で，原点を通る不動直線が存在するための必要十分条件は$A$が0でない実数の固有値をもつことである。
>
> **[定理2]** $A$が表す1次変換で，原点を通らない不動直線が存在するための必要十分条件は
> (i)$A$が1と$\alpha$($\alpha$は0，1以外の実数)を固有値としてもつか
> (ii)$A$が1を重複度が2以上の固有値としてもつことである。

**[命題1]**直線 $\vec{p}=\vec{c}+t\vec{d}$ （$t$は実数の変数）　①
が$A$の表す1次変換の原点を通らない不動直線であるための必要十分条件は

$(A-\alpha E)\vec{d}=\vec{0}$ （$\alpha$は0でない実数）　②

$(A-E)\vec{c}=t\vec{d}$ （$t$は実数）　③

$\vec{c}$と$\vec{d}$は1次独立　④

が成立することである。

**[命題2]**$A$の固有値$\alpha$に対する重複度は，$\alpha$に対する広義固有空間の次元に等しい。

**[命題3]**$A$が$\alpha$を重複度2以上の固有値としてもち$\alpha$の固有空間の次元が1であるならば，
$(A-\alpha E)^2\vec{x}=\vec{0}$ を満たす$\vec{x}$がつくる空間の次元は2である。

## §2. 証明

[命題2]，[命題3]は線型代数学の既知事項であり，[定理1]，[命題1]の証明は容易なので，証明は略。

(定理2の証明)

[必要性]①が$A$の表す1次変換の原点を通らない不動直線であるとすると[命題1]より，②，③，④が成立する。

②，③より $(A-\alpha E)(A-E)\vec{c}=t(A-\alpha E)\vec{d}=\vec{0}$
ここで $(A-\alpha E)(A-E)=(A-E)(A-\alpha E)$ だから

$(A-E)\{(A-\alpha E)\vec{c}\}=\vec{0}$　⑤

(i)　$\alpha\neq1$ のとき

②より$\alpha$は$A$の0，1以外の固有ベクトルである。
また

$(A-\alpha E)\vec{c}\neq\vec{0}$　⑥

である。なぜならば，$(A-\alpha E)\vec{c}=\vec{0}$ とすると
$A\vec{c}=\alpha\vec{c}$，$(A-E)\vec{c}=(\alpha-1)\vec{c}$ となり
これと③より $(\alpha-1)\vec{c}=t\vec{d}$ となるが
これと④より $\alpha=1$ となって $\alpha\neq1$ に反する。
⑤，⑥より1は$A$の固有値である。
以上のことから，$\alpha\neq1$ のとき，$A$は1と$\alpha$($\alpha$は0，1以外の実数)を固有値にもつ。

(ii)　$\alpha=1$ のとき

②より　$(A-E)\vec{d}=\vec{0}$　⑦

⑤より　$(A-E)^2\vec{c}=\vec{0}$　⑧

④，⑦，⑧より固有値1の広義固有空間の次元は2以上である。　⑨

⑨と[命題2]より固有値1の重複度は2以上である。

[十分性]

(i)　$A$が1と$\alpha$($\alpha$は0，1以外の実数)を固有値としてもつとき

$(A-\alpha E)\vec{d}=\vec{0}$ $(\vec{d}\neq\vec{0})$

$(A-E)\vec{c}=\vec{0}$ $(\vec{c}\neq\vec{0})$

を満たす$\vec{c}$，$\vec{d}$がある。このとき③が成立している($t=0$)。また $\alpha\neq1$ より④が成立している。
したがって，[命題1]より

直線　$\vec{p}=\vec{c}+t\vec{d}$

は原点を通らない不動直線である。

(ii)　$A$が1を重複度2以上の固有値としてもち，1の固有空間の次元が2以上のとき

$(A-E)\vec{d}=\vec{0}$　$(\vec{d}\neq\vec{0})$

$(A-E)\vec{c}=\vec{0}$　$(\vec{c}\neq\vec{0})$

$\vec{c}$，$\vec{d}$ は1次独立

を満たす $\vec{c}$，$\vec{d}$ があるから

直線　$\vec{p}=\vec{c}+t\vec{d}$

は原点を通らない不動直線である。

(iii)　$A$が1を重複度2以上の固有値としてもち，1の固有空間の次元が1のとき，[命題3]より

$(A-E)\vec{d}=\vec{0}$　$(\vec{d}\neq\vec{0})$　⑩

$(A-E)^2\vec{c}=\vec{0}$　$(\vec{c}\neq\vec{0})$　⑪

$\vec{c}$，$\vec{d}$ は1次独立

を満たす $\vec{c}$，$\vec{d}$ がある。

⑪より　$(A-E)\{(A-E)\vec{c}\}=\vec{0}$　⑫

1の固有空間の次元が1であることと⑩，⑫より

$\vec{d}$ と $(A-E)\vec{c}$ は1次従属である。

したがって，③が成立するから[命題1]より

直線　$\vec{p}=\vec{c}+t\vec{d}$

は原点を通らない不動直線である。[証明終]

(神奈川県立湘南高等学校)