—数研通信62号を読んで—

$e^{\pi}>\pi^{e}$ の証明について

石坂(いしざか)　貞義(さだよし)

§1. はじめに

数学の世界では，様々な関数を取り扱っていると，偶然にも超越数である自然対数の底 e や円周率 π が登場します。

よく知られている不等式として，自然対数の底 e と円周率 π に関する「不等式 $e^{\pi}>\pi^{e}$ を証明せよ」という問題があります。このことに関連する入試問題をしばしば見かけます。では，どうやって不等式を見積るとよいのか，どうアプローチしたらよいかはなかなか苦心のいるところだと思います。

不等式の証明に関しては，生徒からの突然の質問に答える形で必要に迫られて考えたもの，あるいは生徒自身が考えたものを含めて整理し直してみました。

§2. 不等式 $e^{\pi}>\pi^{e}$ のいろいろな証明方法について

それでは具体的に証明を考えてみます。

1 一般的な証明としては，対数関数 $f(x)=\log x$ に平均値の定理を利用する方法です。

(証明1) $f(x)=\log x$ とおくと $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ であるから $[1,\ \log\pi]$ において平均値の定理を適用すると

$$\frac{f(\log\pi)-f(1)}{\log\pi-1}=f'(c)\quad(1<\exists c<\log\pi)$$

$$\frac{\log(\log\pi)-\log 1}{\log\pi-1}=\frac{1}{c}$$

$1<c$ より $1>\dfrac{1}{c}$ であるから

$$1>\frac{\log(\log\pi)}{\log\pi-1}$$

$$\log\pi-1>\log(\log\pi)$$

$$\log\frac{\pi}{e}>\log(\log\pi)$$

$$\frac{\pi}{e}>\log\pi$$

$$\pi>e\log\pi$$

$$\pi>\log\pi^{e}$$

$$\therefore\quad e^{\pi}>\pi^{e}$$ 終

2 $0<x<y$ のとき，x と y の指数関係 $x^{y}=y^{x}$ を考えます。

両辺の対数をとると $y\log x=x\log y$

これより $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{\log y}{y}$ の関係が得られます。

この同値関係をいったん崩すことによって，大小関係がより明確になる場合があります。この点に着目して証明を与えることは自然な考えであると思われます。整数問題等でもこのような考え方を利用した問題は時々見かけます。

(証明2) 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ について考える。

$$f'(x)=\frac{1}{x^{2}}(1-\log x)$$

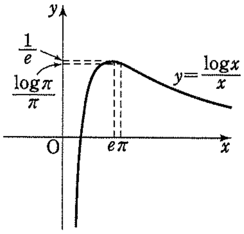
$$f''(x)=\frac{1}{x^{3}}(2\log x-3)$$

$f'(x)=0$ より $x=e$，$f''(x)=0$ より $x=e^{\frac{3}{2}}$

増減表を書くと次のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	$\dfrac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$	↘

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x}=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であるから関数のグラフの概形は次の図のようになる。



関数 $f(x)$ は $x>e$ で単調減少であるから $e<\pi$ では $f(e)>f(\pi)$ が成り立つ。

$$\frac{\log e}{e}>\frac{\log\pi}{\pi}$$

$$\pi\log e>e\log\pi$$

$$\log e^{\pi}>\log\pi^{e}$$

$$\therefore\quad e^{\pi}>\pi^{e}$$ 終

③ 対数をとると(証明2)の関数と同じ関数が登場します。

(証明3) 関数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ を考える。

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$$

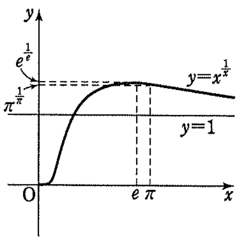
$f'(x)=0$ から $x=e$

よって関数 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	＼	$+$	0	$-$
$f(x)$	＼	↗	$e^{\frac{1}{e}}$	↘

$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$ であるから $y=1$ が漸近線となる。

グラフの概形を描くと下図のようになる。



したがって，関数 $f(x)$ は $x=e$ のとき極大値 $e^{\frac{1}{e}}$ をとる。

$x>e$ では，関数 $f(x)$ は単調減少なので，$e<\pi$ より

$$1<\pi^{\frac{1}{\pi}}<e^{\frac{1}{e}}$$

$$\therefore\quad e^{\pi}>\pi^{e}$$ 終

④ 微分法の応用として，関数の最小値を考えることによって不等式を証明することを，数学IIで学習します。関数を拡張して考えることで数学IIIの教材となります。

(証明4) 関数 $f(x)=x-1-\log x$ のグラフを利用して考える。

真数条件から $x>0$ であり

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

$f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$ よってグラフは下に凸

$f'(x)=0$ より $x=1$

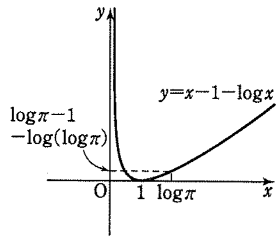
関数 $f(x)$ の増減表を書くと次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	＼	$-$	0	$+$
$f''(x)$	＼	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	＼	↘	0	↗

$$\lim_{x\to\infty}(x-1-\log x)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}-\frac{\log x}{x}\right)=1$$

したがってグラフの概形は下図のようになる。



関数 $f(x)$ は $x=1$ のとき最小値 $f(1)=0$ をとるので，$f(x)\geqq 0$

$x=\log\pi$ のとき $f(\log\pi)>0$ なので

$$\log\pi-1-\log(\log\pi)>0$$

$$\log\frac{\pi}{e}>\log(\log\pi)$$

$$\frac{\pi}{e}>\log\pi$$

$$\pi>e\log\pi$$

$$\pi>\log\pi^{e}$$

$$\therefore\quad e^{\pi}>\pi^{e}$$ 終

参考 $f(x)=x-e\log x$ や $f(x)=\frac{x}{e}-\log x$ などの関数を考え，$x=\pi$ とおいても同様に証明ができます。

⑤ (証明4)では対数関数と1次関数の関数差を考えましたが，次のように指数関数と1次関数の関数差を考えてもよいでしょう。

(証明5) 関数 $f(x)=e^{x-1}-x$ とおくと

$$f'(x)=e^{x-1}-1=\frac{e^x-e}{e}$$

$f'(x)=0$ より $x=1$

関数 $f(x)$ の増減表をかくと次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

関数 $f(x)$ は $x=1$ のとき極小かつ最小となる。
よって　$f(x)\geqq f(1)=0$
$x>1$ のとき $f(x)$ は単調増加である。
$e<\pi$ から $1<\dfrac{\pi}{e}$ がいえるので
$f\left(\dfrac{\pi}{e}\right)>0$ が成り立つ。
すなわち $e^{\frac{\pi}{e}-1}-\dfrac{\pi}{e}>0$

$e^{\frac{\pi}{e}}>\pi$　∴　$e^{\pi}>\pi^{e}$　終

⑥ 不等式を面積を利用して評価するというのは正攻法ではないのかもしれませんが，１つの証明法として試みてみましょう。

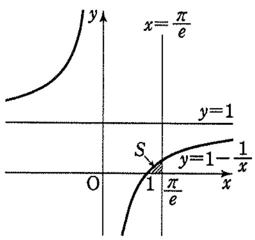
（証明６） 曲線 $y=1-\dfrac{1}{x}$ と直線 $x=\dfrac{\pi}{e}$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。$1<\dfrac{\pi}{e}$ であるから

$$S=\int_1^{\frac{\pi}{e}}\left(1-\frac{1}{x}\right)dx=\Big[x-\log x\Big]_1^{\frac{\pi}{e}}=\frac{\pi}{e}-\log\frac{\pi}{e}-1$$
$$=\frac{\pi}{e}-\log\pi>0$$

よって　$\dfrac{\pi}{e}>\log\pi$

$\pi>e\log\pi$

すなわち　$e^{\pi}>\pi^{e}$　終



⑦ C^{∞} 級の関数 $f(x)=e^{x}$ をテイラーの定理によりべき級数展開したときの第２項までの整関数 $1+x$ と e^{x} の大小関係を考えます。

（証明７） $f(x)=e^{x}$ をテイラーの定理を用いてべき級数展開すると

$$e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots \qquad \cdots\cdots①$$

であるから，第３項以下の正の剰余項を無視すると

$x>0$ のとき不等式 $e^{x}>1+x$　$\cdots\cdots②$

が成り立つことは容易にわかります。

$0<e<\pi$ より $0<\dfrac{\pi}{e}-1<1$ がいえるので，

いま $x=\dfrac{\pi}{e}-1$ とおいて，不等式②を利用すると

$$e^{\frac{\pi}{e}-1}>1+\left(\frac{\pi}{e}-1\right)=\frac{\pi}{e}$$

よって　$e^{\frac{\pi}{e}}>\pi$　すなわち　$e^{\pi}>\pi^{e}$　終

参考 当然のことですが，（証明５）は不等式②の x の代わりに $x-1$ とおいたものとなっています。

§3. e^{π} と π^{e} の近似値について

では，e^{π} と π^{e} が実際にはどれくらいの値なのか調べてみたいと思います。高校での学習範囲を超えますが，意欲ある生徒への課題研究として，また，計算機のプログラム作成の際にも参考になると思いますので，述べておきます。

まず，e^{π} についてはべき級数展開①式について考えます。

いま $e=2.71828$，$\pi=3.14159$ とすると $\pi>3$ より $0<\pi-3<1$ であるから，①式の第５項以下の正の剰余項を無視すると

$$e^{\pi-3}\fallingdotseq 1+(\pi-3)+\frac{1}{2!}(\pi-3)^{2}+\frac{1}{3!}(\pi-3)^{3}$$
$$=1+0.14159+\frac{1}{2}(0.14159)^{2}+\frac{1}{6}(0.14159)^{3}$$
$$\fallingdotseq 1.15208$$

$e^{\pi}=(2.71828)^{3}\times 1.15208\fallingdotseq 23.140091$

よって e^{π} の値は約 23.14 となります。

一方，π^{e} については，若干準備が必要です。

$-1<x<1$ において，C^{∞} 級の関数 $\log(1+x)$ をテイラーの定理を用いてべき級数展開します。

$$\log(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)}=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\cdots \qquad \cdots③$$

ここで，$0<e<\pi$ より $0<\dfrac{\pi}{e}-1<1$ であるから

③で $x=\dfrac{\pi}{e}-1$ とおくことにより

$$\log\frac{\pi}{e}=\log\left\{1+\left(\frac{\pi}{e}-1\right)\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n+1}\left(\frac{\pi}{e}-1\right)^{n+1}$$
$$\fallingdotseq\left(\frac{\pi}{e}-1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{e}-1\right)^{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{e}-1\right)^{3}$$
$$=\left(\frac{3.14159}{2.71828}-1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3.14159}{2.71828}-1\right)^{2}$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{3.14159}{2.71828}-1\right)^3$$

$$\fallingdotseq 0.155727-0.012125+0.001258$$

$$=0.14486$$

よって

$\log\pi-1\fallingdotseq 0.14486$ から $\log\pi\fallingdotseq 1.14486$

$e\log\pi\fallingdotseq 2.71828\times 1.14486\fallingdotseq 3.11205$

したがって　$\pi^e=e^{e\log\pi}$ から

$$\pi^e\fallingdotseq e^{3.11205}=e^3\cdot e^{0.11205}$$

$$\fallingdotseq(2.71828)^3\left\{1+0.11205+\frac{1}{2}(0.11205)^2\right\}$$

$$=20.08496\times 1.11832\fallingdotseq 22.46$$

ゆえに π^e の値は約 22.46 であることがわかります。

§4. さいごに

e^π と π^e の近似値について，生徒から「おおよそどれくらいの値になるのか」という質問を受け，その素朴な疑問に答えるべく検討をしてみました。その過程で，平均値の定理の拡張としてのテイラーの定理に自然に辿り着くことを再認識させられました。パソコンによる数式処理が発達した昨今ですが，実際に手を動かして計算することが大切であるということを痛感したしだいです。不等式 $e^\pi>\pi^e$ は，微妙な数値関係の間に成り立つ不等式であるといえます。問題は誘導つきだったと思いますが，筑波大学，お茶の水大学理学部数学科推薦入試等の入試問題として出題されていたと記憶しています。改めて取り組んでみると出題者の意図も窺えるような気がいたします。さらに e^π は超越数ですが，π^e は超越数であるかどうかさえも分かっていないということです。その 2 数を不等式で見積もっているところが趣のあるところだと思います。

上に示した証明以外にも様々な証明方法があると考えられます。御意見いただければ幸いです。

《参考文献》

〔1〕 大島利雄他著「数学Ⅲ」教科書 数研出版2007年
〔2〕 寺澤順著「π と微積分の23話」日本評論社2006年 (p.110)
〔3〕 久末正樹著　数研通信「e，3，π の関係について」　数研出版2008年
〔4〕 大関信雄・青柳雅計共著「不等式」槇書店1967年
〔5〕 高木貞治著「解析概論」岩波書店1961年

(福岡県立嘉穂東高等学校)