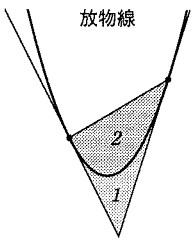
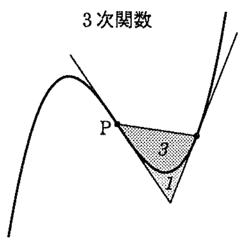
4次関数のグラフと面積に関する一考察

横山（よこやま）　政道（まさみち）

§1. はじめに

放物線とその2接線で囲まれる部分，およびその2接点を通る直線と放物線で囲まれる部分の面積比は1：2であり，3次関数のグラフとその変曲点における接線上の任意の点から引いた接線で囲まれる部分，およびその接点と変曲点を結ぶ直線と3次関数で囲まれる部分の面積比は1：3である。簡単な整数比になる関係に，4次関数にもあてはまるのではないかと思ったので少し調べてみることにした。

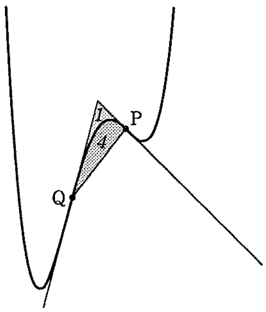




§2. 4次関数のグラフと面積

4次関数のグラフは変曲点が存在する場合を考え，3次関数の場合同様，変曲点における2接線を引き，その2接線と4次関数で囲まれる部分，および2つの変曲点を結ぶ直線と4次関数で囲まれる部分の面積の関係に注目し，次の命題を証明する。

命題　$y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\ (a\neq 0)$　……①
と2個の変曲点P，Qにおける2接線で囲まれる部分，およびその2接点を通る直線と4次関数で囲まれる部分の面積比は1：4である。(※)



(※)を証明する際，平行移動しても囲まれる図形の面積は変わらないので，(計算を楽にするために)変曲点が原点にくるように平行移動した式②で考えることにする。以下，次の補題を証明する。

補題　方程式 $y''=0$ が実数解をもつ場合
4次関数 $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ ……①
が，$y''=0$ の1つの解(重解でもよい) α をもつとき，①を x 軸方向に $-\alpha$，y 軸方向に $-f(\alpha)$ 平行移動すると $y=ax^4+b'x^3+c'x$ ……②
の形で表される。

[証明]　α は，$6ax^2+3bx+c=0$ の解より

$$6a\alpha^2+3b\alpha+c=0 \quad \cdots\cdots ③$$

題意より，

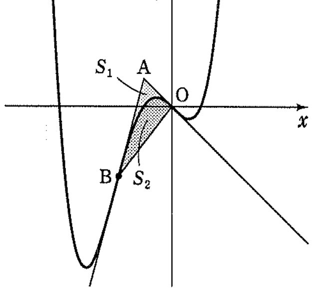
$$\begin{aligned}y&=a(x+\alpha)^4+b(x+\alpha)^3+c(x+\alpha)^2+d(x+\alpha)\\&\quad+e-f(\alpha)\\&=ax^4+(4a\alpha+b)x^3+(6a\alpha^2+3b\alpha+c)x^2\\&\quad+(4a\alpha^3+3b\alpha^2+2c\alpha+d)x\end{aligned}$$

③を上式に代入すると，①は②の式で表される。

■

[命題の証明]

それでは，下図を用いて(※)を証明する。



①において $y''=0$ は実数解をもつので4次関数を $f(x)=ax^4+bx^3+cx$ とおいてよい。

$$f'(x)=4ax^3+3bx^2+c$$

$$f''(x)=12ax^2+6bx=12ax\left(x+\frac{b}{2a}\right)$$

原点 (変曲点) における接線の式は $y=cx$

残りの変曲点 $\mathrm{B}\left(-\frac{b}{2a},\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ における接線の式は

$$y=f'\left(-\frac{b}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}\right)+f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

これと $y=cx$ を連立して $x=-\frac{b}{4a}$

よって，交点Aの座標は $\left(-\frac{b}{4a},\ -\frac{bc}{4a}\right)$

△OAB の面積は図の S_1+S_2 に等しく，

$$S_1+S_2=\frac{1}{2}\left|\frac{b^2c}{8a^2}-\frac{b}{4a}\left(\frac{b^4}{16a^3}+\frac{bc}{2a}\right)\right|=\frac{|b^5|}{128a^4}$$

また，$S_2=\int_{-\frac{b}{2a}}^{0}\left\{ax^4+bx^3+cx-\left(\frac{b^3}{8a^2}+c\right)x\right\}$

$$=\frac{|b^5|}{160a^4}$$

よって，$S_1=\frac{|b^5|}{640a^4}$ となり，

$$S_1:S_2=\frac{1}{640}:\frac{1}{160}=1:4$$

■

《参考文献》

〔1〕 大学への数学　1対1対応の演習　数学II ($p.165$)

(宮崎県立宮崎南高等学校)