―大学入試問題の背景を探る―

無限級数の項別積分とミクシンスキーの積分論について

長澤(ながさわ)　武夫(たけお)

§1. はじめに

大学入試問題の裏には高等数学における学問上の意図が隠されている事が多い。ここでは無限級数の項別積分について考察する。まず，次の定理を紹介する。

【定理A】 $\{f_n(x)\}$ を $[a,\ b]$ で連続な関数の列で，一様収束 ⇒

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b\left\{\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right\}dx$$

次の例題において，この定理が利用できないだろうか？まず，通常の解答を示す。

【例題】

(1)　自然数 n に対して，

$$R_n(x)=\frac{1}{1+x}-\{1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n\}$$

とするとき，$\left|\int_0^1 R_n(x^2)\,dx\right|\leqq\dfrac{1}{2n+3}$ を証明せよ。

(2)　(1)を利用して，次の無限級数を求めよ。

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

〔類　札幌医大〕

(解答)　(1)　$R_n(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}=\dfrac{(-x)^{n+1}}{1+x}$

から，

$$\left|\int_0^1 R_n(x^2)\,dx\right|\leqq\int_0^1|R_n(x^2)|\,dx\leqq\int_0^1\left|\frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\right|dx$$

$$\leqq\int_0^1\frac{(x^2)^{n+1}}{1+x^2}\,dx\leqq\int_0^1 x^{2n+2}\,dx=\left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1=\frac{1}{2n+3}$$

……①

(2)　①より

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1\left[\frac{1}{1+x^2}-\{1-x^2+x^4-\cdots\cdots+(-1)^n x^{2n}\}dx\right]\right|$$

$$\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 R_n(x^2)\,dx=0\quad\cdots\cdots②$$

また $x=\tan\theta$ とおくと $dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$\theta=0$ のとき $x=0$，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき $x=1$ であるから

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}\quad\text{により}$$

$$\int_0^1 R_n(x^2)\,dx=\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}\right)$$

②から

$$n\to\infty\Rightarrow\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots\right)=0$$

$$\therefore\quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots=\frac{\pi}{4}$$

終

もし $R_n(x)=\dfrac{1}{1+x}-\{1-x+x^2-\cdots\cdots+(-1)^n x^n\}$ が一様収束ならば，例題の解答は

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int_0^1(1-x^2+x^4-\cdots\cdots)\,dx\quad\cdots\cdots③$$

$$=\int_0^1 dx-\int_0^1 x^2\,dx+\int_0^1 x^4\,dx-\cdots\quad\cdots\cdots④$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots=\frac{\pi}{4}\quad\text{となるであろう。}$$

$R_n(x)$ を一様収束と仮定しているので，定理Aから ③=④ が成り立つからである。ところが，$R_n(x)$ が一様収束であることの証明ができるか疑問である。入試問題では，この問題を避けるため，上のような方法で解答することになる。

さらに調べていくと，ミクシンスキーの積分論が

利用できることが分かったので紹介する。

§2. ミクシンスキーの積分論について

【定義1】 $a,\ b\in R$：実数 $(a<b)$ とする。

$[a,\ b)$ を brick, $x(x)=\begin{cases}1 \text{ if } x\in[a,\ b) \\ 0 \text{ if } x\notin[a,\ b)\end{cases}$ を

$[a,\ b)$ の台関数という。

【定義2】 x：$[a,\ b)$ の台関数に対し，

積分を $\int x=b-a$ で定義する。

【定義3】 $f_1,\ f_2,\ \cdots f_n$：台関数，$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\lambda_n$：実数に対し

$f=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\cdots\cdots+\lambda_n f_n$ としたとき

$\int f=\lambda_1\int f_1+\lambda_2\int f_2+\cdots\cdots+\lambda_n\int f_n$

と定義する。

【定義4】 f：R における実数関数

$\exists f_i$：台関数 $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$，$\exists\lambda_i$：実数 $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$(s.t.)$ (1) $|\lambda_1|\int f_1+|\lambda_2|\int f_2+\cdots\cdots<+\infty$

(2) $f(x)=\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\cdots\cdots$

for x：絶対収束する点

のとき $f\cong\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\cdots\cdots$ とかき，f はルベーグ積分可能であるといい $\int f=\lambda_1\int f_1+\lambda_2\int f_2+\cdots\cdots$ と定義する。ルベーグ積分可能である関数全体を $L^1(R)$ と表す。このとき，次の定理が成り立つ。

【ルベーグの収束定理】

$f_n\in L^1$，$f_n\to f(a.e.)\ \exists g\in L^1\ (s.t.)$

$|f_n(x)|\leqq g(x)\Rightarrow f\in L^1$，$\int f=\lim_{n\to\infty}\int f_n$

これから次の定理が導かれる。

【定理B】

$f_n\in L^1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\int|f_n|<+\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}f_n\in L^1$，$\int\sum_{n=1}^{\infty}f_n=\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n$

§3. 例題の別解に挑戦

では【定理B】を用いて，本来一様収束を証明すべきところを，回避して最初の例題を解いてみよう。

(例題の別解)

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots\cdots$$
$$=1+(-x^2)+(-x^2)^2+(-x^2)^3+\cdots\cdots$$
$$=(1-x^2)+x^4(1-x^2)+x^8(1-x^2)+\cdots\cdots$$
$$=(1-x^2)(1+x^4+x^8+\cdots\cdots)=\sum_{n=1}^{\infty}k_n(x)$$

ただし，$k_n(x)=x^{4(n-1)}(1-x^2)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とおく。

$k_n\geqq 0$，$k_n(x)\in L^1(0,\ 1)$

$$\int_0^1 k_n(x)\,dx=\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-1}\right\}\text{：交代級数}$$

$$n\to\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n-1}=0$$

Leibniz の定理から $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-1}\right\}$ は収束する。よって定理Bより

$$\sum_{n=1}^{\infty}k_n=\frac{1}{1+x^2}\in L^1(0,\ 1),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 k_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots\cdots\text{：収束}$$

ここで $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$ であるから

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots\cdots=\frac{\pi}{4}$$ 終

§4. おわりに

関数が一様収束であることの証明はできないことが多い。大学入試においては，そのことに深く立ち入らずに，かつ論理性を失わない工夫がなされているようである。ミクシンスキーの積分論が，このような形で応用ができたことは意外だった。

《参考文献》

〔1〕 大学への数学・微積分基礎の極意　東京出版
〔2〕 An Introduction to the Theory of the Lebesgue Integral in the Sense of Mikusinski　田中昭三著

(福岡県立久留米筑水高等学校)