入試の良問とフィボナッチ数列・リュカ数列

宮川(みやかわ)　幸隆(ゆきたか)

§1. はじめに

'04年の入試問題に，フィボナッチ数列やリュカ数列と関連のある問題が出題されました。それは以下の問題です。

> 次の条件(A)，(B)を満たす関数 $f_n(x)$ ($n=1$，2，3，……) を考える。
> (A)　$f_n(x)$ は x の n 次式で表される。
> (B)　任意の実数 θ に対して次式が成立する。
> $f_n(2\cos\theta)\sin\theta=\sin(n+1)\theta$
> (以下省略)
> 〔東京医科歯科大 (前期) の 1 番〕

> 多項式の列 $f_n(x)$，$n=0$，1，2，……が，
> $f_0(x)=2$，$f_1(x)=x$，
> $f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)$，$n=2$，3，4，……
> を満たすとする。
> (1)　$f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$，$n=0$，1，2，……
> であることを示せ。
> (以下省略)
> 〔名古屋大 (前期) 理系の 3 番〕

参考文献〔1〕で解説したように，上の東京医科歯科大の入試問題は第 2 種チェビシェフ多項式を背景に持っており，上の名古屋大の入試問題はチェビシェフ多項式を背景に持っています。

n を自然数 1，2，3，……とするとき，すべての実数 θ に対し

$$\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$$

を満たし，係数がすべて整数であるような n 次多項式 $T_n(x)$ と，

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=g_n(\cos\theta)$$

を満たし，係数がすべて整数であるような $n-1$ 次多項式 $g_n(x)$ が存在します。これらの多項式 T_n 達は**チェビシェフ多項式**と呼ばれ，g_n 達は，**第 2 種チェビシェフ多項式**と呼ばれます。

cos の加法定理から，多項式列 $\{T_n(x)\}$ は，漸化式

$$\boldsymbol{T_{k+1}(x)=2xT_k(x)-T_{k-1}(x)\ \ (k\geqq 2)} \qquad \cdots①$$

を満たします。また，sin の加法定理から，多項式列 $\{g_n(x)\}$ も，多項式列 $\{T_n(x)\}$ が満たす漸化式①と全く同一の漸化式

$$\boldsymbol{g_{k+1}(x)=2xg_k(x)-g_{k-1}(x)\ \ (k\geqq 2)} \qquad \cdots②$$

を満たします。

§2. 名古屋大の入試問題の $f_n(x)$ の係数

さて，上の名古屋大の入試問題の $f_n(x)$ は，その漸化式と初期条件から，明らかに整数係数です。更に(1)の式

$$f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta,\ \ n=0,\ 1,\ 2.\ \cdots\cdots$$

から，

$$f_n(2x)=2T_n(x),\ \ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$$

ですから，**$2T_n(x)$ は $2x$ の整数係数多項式となる**のです。そのことを具体例で確かめましょう：

$T_1(x)=x$，$T_2(x)=2x^2-1$ ですから，この初期条件と漸化式①から，試みに，いくつかの $T_n(x)$ を求めると，

$T_3(x)=4x^3-3x$
$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$
$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$
$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$
$T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x$
$T_8(x)=128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1$
$T_9(x)=256x^9-576x^7+432x^5-120x^3+9x$
$T_{10}(x)=512x^{10}-1280x^8+1120x^6-400x^4+50x^2-1$
$T_{11}(x)=1024x^{11}-2816x^9+2816x^7-1232x^5$
$\qquad +280x^3-11x$

等々となります。そして，

$2T_1(x)=2x$
$2T_2(x)=4x^2-2=(2x)^2-2$
$2T_3(x)=8x^3-6x=(2x)^3-3(2x)$

$2T_4(x)=16x^4-16x^2+2=(2x)^4-4(2x)^2+2$

$2T_5(x)=32x^5-40x^3+10x=(2x)^5-5(2x)^3+5(2x)$

$$2T_6(x)=64x^6-96x^4+36x^2-2$$
$$=(2x)^6-6(2x)^4+9(2x)^2-2$$

$$2T_7(x)=128x^7-224x^5+112x^3-14x$$
$$=(2x)^7-7(2x)^5+14(2x)^3-7(2x)$$

$$2T_8(x)=256x^8-512x^6+320x^4-64x^2+2$$
$$=(2x)^8-8(2x)^6+20(2x)^4-16(2x)^2+2$$

$$2T_9(x)=512x^9-1152x^7+864x^5-240x^3+18x$$
$$=(2x)^9-9(2x)^7+27(2x)^5-30(2x)^3+9(2x)$$

$$2T_{10}(x)=1024x^{10}-2560x^8+2240x^6-800x^4+100x^2-2$$
$$=(2x)^{10}-10(2x)^8+35(2x)^6-50(2x)^4+25(2x)^2-2$$

$$2T_{11}(x)=2048x^{11}-5632x^9+5632x^7-2464x^5+440x^3-22x$$
$$=(2x)^{11}-11(2x)^9+44(2x)^7-77(2x)^5+55(2x)^3-11(2x)$$

等々となります。

p を素数とするとき，$2T_p(x)$ を $2x$ の整数係数多項式と見たときの最高次の項以外の項の係数は，全て p の倍数となります。

さて，以上から，上の名古屋大の入試問題の $f_n(x)$ をいくつか書くと，

$f_0(x)=2$

$f_1(x)=x$

$f_2(x)=x^2-2$

$f_3(x)=x^3-3x$

$f_4(x)=x^4-4x^2+2$

$f_5(x)=x^5-5x^3+5x$

$f_6(x)=x^6-6x^4+9x^2-2$

$f_7(x)=x^7-7x^5+14x^3-7x$

$f_8(x)=x^8-8x^6+20x^4-16x^2+2$

$f_9(x)=x^9-9x^7+27x^5-30x^3+9x$

$f_{10}(x)=x^{10}-10x^8+35x^6-50x^4+25x^2-2$

$f_{11}(x)=x^{11}-11x^9+44x^7-77x^5+55x^3-11x$

等々となります。

さて，**この $f_n(x)$ の係数の絶対値の総和は，リュカ数列をなします。**……③，実際，

$2=2$

$1=1$

$1+2=3$

$1+3=4$

$1+4+2=7$

$1+5+5=11$

$1+6+9+2=18$

$1+7+14+7=29$

$1+8+20+16+2=47$

$1+9+27+30+9=76$

$1+10+35+50+25+2=123$

$1+11+44+77+55+11=199$

………

です。さて，上述の③を証明しましょう：

c を 0 でない定数とし，初期条件 $F_0(x)=c$, $F_1(x)=x$，漸化式

$$\boldsymbol{F_{k+1}(x)=xF_k(x)+F_{k-1}(x),\quad k\geqq 1}$$

を満たす多項式列 $\{F_n(x)\}$ を考え，各 $F_n(x)$ を**フィボナッチ多項式**と呼ぶことにします。このように命名する理由は，$c=1$ のとき，数列 $\{F_n(1)\}$ がフィボナッチ数列となるからです。

$c=2$ のときは，数列 $\{F_n(1)\}$ は**リュカ数列**，

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, ……

となります。換言すれば，$c=1$ のとき，$F_n(x)$ の係数の総和はフィボナッチ数列をなします。また，このとき ($c>0$ のとき) $F_n(x)$ ($n=0, 1, 2, \cdots\cdots$) のすべての係数が負でないことは明らかでしょう〔∵ 初期条件と漸化式〕。

まず次の命題を示しましょう：

> **【命題 1】** フィボナッチ多項式は，
>
> $F_{2k+1}(x)=x^{2k+1}+a_1x^{2k-1}+\cdots\cdots+a_{2k-1}x$ …④
>
> $F_{2k}(x)=x^{2k}+a_2x^{2k-2}+\cdots\cdots+a_{2k-2}x^2+a_{2k}$ …⑤
>
> という形をしている。

(証明) $F_0(x)=c$，$F_1(x)=x$，$F_2(x)=x^2+c$，$F_3(x)=x^3+(c+1)x$ であるから，$k=0$，1 のときは④，⑤という形をしている。一方，漸化式から

$$F_{k+2}(x)=xF_{k+1}(x)+F_k(x)$$
$$=x(xF_k(x)+F_{k-1}(x))+F_k(x)$$
$$=(x^2+1)F_k(x)+xF_{k-1}(x)$$
$$=(x^2+1)F_k(x)+F_k(x)-F_{k-2}(x)$$
$$=(x^2+2)F_k(x_1)-F_{k-2}(x)$$

であるから，帰納法によって $k\geqq 2$ のときも④，⑤という形をしている。 ■

【命題2】 $c=2$ のときのフィボナッチ多項式が④，⑤という形をしているならば，③の $f_n(x)$ は

$$f_{2k+1}(x)=x^{2k+1}-a_1x^{2k-1}+\cdots\cdots+(-1)^k a_{2k-1}x \quad \cdots⑥$$

$$f_{2k}(x)=x^{2k}-a_2x^{2k-2}+\cdots\cdots+(-1)^{k-1}a_{2k-2}x^2+(-1)^k a_{2k} \quad \cdots⑦$$

という形をしている。

(証明) $F_0(x)=2$, $F_1(x)=x$, $F_2(x)=x^2+2$, $F_3(x)=x^3+3x$, $f_0(x)=2$, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2-2$, $f_3(x)=x^3-3x$ であるから，$k=0$, 1 のときは⑥，⑦という形をしている。一方，漸化式から

$$\begin{aligned}F_{2k+2}(x)&=x^{2k+2}+a_1x^{2k}+a_3x^{2k-2}+\cdots\cdots+a_{2k-1}x^2\\&\quad+x^{2k}+a_2x^{2k-2}+\cdots\cdots+a_{2k-2}x^2+a_{2k}\\&=x^{2k+2}+(a+1)x^{2k}+(a_3+a_2)x^{2k-2}\\&\quad+\cdots\cdots+(a_{2k-1}+a_{2k-2})x^2+a_{2k}\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}f_{2k+2}(x)&=x^{2k+2}-a_1x^{2k}+a_3x^{2k-2}+\cdots\cdots+(-1)^k a_{2k-1}x^2\\&\quad-x^{2k}+a_2x^{2k-2}-\cdots\cdots+(-1)^k a_{2k-2}x^2+(-1)^{k+1}a_{2k}\\&=x^{2k+2}-(a_1+1)x^{2k}+(a_3+a_2)x^{2k-2}\\&\quad+\cdots\cdots+(-1)^k(a_{2k-1}+a_{2k-2})x^2+(-1)^{k+1}a_{2k}\end{aligned}$$

であるから，$k=2$ のときも⑦という形をしている。$k=2$ のときの⑦は $k=1$ のときの

$$\begin{aligned}&f_{2k+2}(x)\\&=x^{2k+2}-a_0x^{2k}+a_2x^{2k-2}+\cdots\cdots+(-1)^{k+1}a_{2k}\end{aligned}$$

であり，これと $k=1$ のときの⑥と漸化式から

$$\begin{aligned}&f_{2k+3}(x)\\&=x^{2k+3}-a_0x^{2k+1}+a_2x^{2k-1}+\cdots\cdots+(-1)^{k+1}a_{2k}x\\&\quad-x^{2k+1}+a_1x^{2k-1}+\cdots\cdots+(-1)^{k+1}a_{2k-1}x\\&=x^{2k+3}-(a_0+1)x^{2k+1}+(a_2+a_1)x^{2k-1}\\&\quad+\cdots\cdots+(-1)^{k+1}(a_{2k}+a_{2k-1})x\end{aligned}$$

であって，一方，このとき

$$\begin{aligned}F_{2k+3}(x)&=x^{2k+3}+a_0x^{2k+1}+a_2x^{2k-1}+\cdots\cdots+a_{2k}x\\&\quad+x^{2k+1}+a_1x^{2k-1}+\cdots\cdots+a_{2k-1}x\\&=x^{2k+3}+(a_0+1)x^{2k+1}+(a_2+a_1)x^{2k-1}\\&\quad+\cdots\cdots+(a_{2k}+a_{2k-1})x\end{aligned}$$

であるから，$k=2$ のときも⑥という形をしている。

以下同様に(帰納的に) $k\geqq 3$ のときも⑥，⑦という形をしている。 ■

この命題2から，③の成立がわかりました。

§3. 東京医科歯科大の入試問題の $f_n(x)$ の係数

さて，上の東京医科歯科大の入試問題の $f_n(x)$ は問題文からは整数係数かどうかわからないのですが，やはり sin の加法定理から

$$\sin(k+1)\theta=\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta,$$
$$\sin(k-1)\theta=\sin k\theta\cos\theta-\cos k\theta\sin\theta$$

ですから，この2式を辺々加えることによって，

$$\sin(k+1)\theta+\sin(k-1)\theta=2\cos\theta\sin k\theta,$$

ゆえに，上の東京医科歯科大の入試問題の(B)から

$$\begin{aligned}&f_k(2\cos\theta)\sin\theta+f_{k-2}(2\cos\theta)\sin\theta\\&=2\cos\theta f_{k-1}(2\cos\theta)\sin\theta,\end{aligned}$$

ゆえに，この多項式列 $\{f_n(x)\}$ は漸化式

$$\boldsymbol{f_k(x)=xf_{k-1}(x)-f_{k-2}(x)\ (k\geqq 3)} \quad \cdots⑧$$

を満たします。この⑧は③の $f_n(x)$ が満たす漸化式と全く同一です。しかし，初期条件が

$$f_1(x)=x,\ f_2(x)=x^2-1$$

のように異なるのです。この初期条件と漸化式⑧から，⑧の $f_n(x)$ も整数係数となるのです。さらに(B)の式

$$f_n(2\cos\theta)\sin\theta=\sin(n+1)\theta,\ n\geqq 1$$

から，

$$f_n(2x)=g_{n+1}(x),\ n\geqq 1$$

ですから，**$g_{n+1}(x)$，$n\geqq 1$ は $2x$ の整数係数多項式となるのです。**そのことを具体例で確かめましょう：

$g_1(x)=1$，$g_2(x)=2x$ ですから，この初期条件と漸化式②から，試みに，いくつかの $g_n(x)$ を求めると，

$$g_3(x)=4x^2-1=(2x)^2-1$$
$$g_4(x)=8x^3-4x=(2x)^3-2(2x)$$
$$g_5(x)=16x^4-12x^2+1=(2x)^4-3(2x)^2+1$$
$$g_6(x)=32x^5-32x^3+6x=(2x)^5-4(2x)^3+3(2x)$$
$$\begin{aligned}g_7(x)&=64x^6-80x^4+24x^2-1\\&=(2x)^6-5(2x)^4+6(2x)^2-1\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}g_8(x)&=128x^7-192x^5+80x^3-8x\\&=(2x)^7-6(2x)^5+10(2x)^3-4(2x)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}g_9&=256x^8-448x^6+240x^4-40x^2+1\\&=(2x)^8-7(2x)^6+15(2x)^4-10(2x)^2+1\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}g_{10}(x)&=512x^9-1024x^7+672x^5-160x^3+10x\\&=(2x)^9-8(2x)^7+21(2x)^5-20(2x)^3+5(2x)\end{aligned}$$

等々となっています。また，$g_{23}(x)$ が $2x$ の整数係数多項式となることは，既に参考文献［1］の中に示してあります。

さて，以上から，⑧の $f_n(x)$ をいくつか書くと，

$f_1(x)=x$

$f_2(x)=x^2-1$

$f_3(x)=x^3-2x$

$f_4(x)=x^4-3x^2+1$

$f_5(x)=x^5-4x^3+3x$

$f_6(x)=x^6-5x^4+6x^2-1$

$f_7(x)=x^7-6x^5+10x^3-4x$

$f_8(x)=x^8-7x^6+15x^4-10x^2+1$

$f_9(x)=x^9-8x^7+21x^5-20x^3+5x$

等々となります。

さて，**この $f_n(x)$ の係数の絶対値の総和は，フィボナッチ数列をなします**……⑨，実際，

$1=1$

$1+1=2$

$1+2=3$

$1+3+1=5$

$1+4+3=8$

$1+5+6+1=13$

$1+6+10+4=21$

$1+7+15+10+1=34$

$1+8+21+20+5=55$

………

です。参考文献〔1〕から，

$$f_{22}(x)=x^{22}-21x^{20}+190x^{18}-969x^{16}+3060x^{14}-6188x^{12}+8008x^{10}-6435x^8+3003x^6-715x^4+66x^2-1$$

ですが，

$$1+21+190+969+3060+6188+8008+6435+3003+715+66+1=28657$$

も一つのフィボナッチ数です。実際，

$34+55=89$

$55+89=144$

$89+144=233$

$144+233=377$

$233+377=610$

$377+610=987$

$610+987=1597$

$987+1597=2584$

$1597+2584=4181$

$2584+4181=6765$

$4181+6765=10946$

$6765+10946=17711$

$10946+17711=28657$

です。

命題2と同様にして

> **【命題2′】** $c=1$ のときのフィボナッチ多項式が④，⑤という形をしているならば，⑨の $f_n(x)$ は⑥，⑦という形をしている。

が証明されますから，⑨の成立がわかります。

さて，p を素数とするとき，$2T_p(x)$ を $2x$ の整数係数多項式と見たときの最高次の項以外の項の係数は全て p の倍数となるということを言いました。私は，その証明も持っておりますが，ここではあえて割愛します。その理由は，この頁の残りの部分では，とても証明しきれないし，本稿の主旨からは若干離れてしまうと思われるからです。

参考文献〔1〕では，チェビシェフ多項式と第2種チェビシェフ多項式の因数分解に言及しましたが，それは数研通信「数学」No.17 の柳田五夫先生の論説から教わりました。また，〔1〕において，曲線群 $\{y=T_n(x)\}$ や $\{y=g_n(x)\}$ の包絡線にも言及しましたが，それらの求め方は，やはり数研通信「数学」No.32 の石田充学先生の論説から教わりました。さらには本稿は，やはり数研通信「数学」No.41，42 の宮地俊彦先生の論説に触発されて書き上げることが出来ました。ここに改めまして諸先生方に感謝申し上げる次第です。

命題1と命題2の証明は私自身が与えたものです。したがって，その部分の参考文献はありません。

《参考文献》

〔1〕 宮川幸隆，’04年大学入試の背景を探る，数研通信「数学」No.51，p.24～26

〔2〕 宮地俊彦，フィボナッチ数を教室に（I），数研通信「数学」No.41，p.1～5

〔3〕 宮地俊彦，フィボナッチ数を教室に（II），数研通信「数学」No.42，p.8～13

〔4〕 石田充学，包絡線について，数研通信「数学」No.32，p.12～17

〔5〕 柳田五夫，チェビシェフの多項式について，数研通信「数学」No.17，p.6～11

（静岡県立静岡中央高等学校）