「分ける(場合分け)」と「分かる」

西元(にしもと)　教善(のりよし)

§1. はじめに

中高連携教育で高校数学への橋渡しを円滑に進めて，数学力の向上を図ろうという試みが進行している。進学実績のある中高一貫制私学にとっては，余りにも遅きに失したとした対応にしか映らないであろうが，地方の公立中学校や高等学校にとってはこれからの学力向上に向けて期待のかかる事業である。特に高校側としては受け皿として，是非実践しておきたいことであり，オープンスクールよりも効果のある学校紹介であると個人的には認識している。

私自身，市内の中学校の先生と連携して，中学校における授業のアシスタントとしてチームティーチングを，さらには，高校数学の入門として「たすきがけによる因数分解」というテーマの出前授業をパワーポイントを活用して行った経験がある。([4])

経験からいうと，連携教育に対する中学生の反応は極めてよく，これからも継続を希望する声が生徒から，また関係教員からもあったにもかかわらず，残念ながら現在のところ，本市においては一過性の試みになりつつある。

現在，私の勤務している高校は，山口県東部の伝統のある進学校ではあるが，入学してくる生徒の数学力の格差が拡大している。拡大といっても上にも下にもといった拡大ではなく，全体的に低下し，底辺の拡大が進んでいる。統廃合に伴って，本校の分校化された高校のこともあり，少子化にもかかわらず一時的にではあるが入学定員も増加している。

このような現状では，中高連携の浸透が，特に進学校とはどういう学校であり，それに対する心構えとしての勉強の質・量を認識することが不可欠であると思うのであるが，出前授業への希望がなく連携がうまく進行していない。また，高校での数学の授業を改善する上でも，教員の資質向上のためにも高校の教員は中学校での出前授業を経験すべきであると思うのであるが，頓挫の状態である。他地域，他県では，どのような状態であるのかを知りたいのと中高連携をどのように進めているのか，その進捗状況と浸透のためのポリシーを是非知りたいと思う。

§2. 新入生の高校数学への戸惑い

高校に入学した生徒は，一様に数学の授業のスピード，内容の多さ，高度さに戸惑うようである。また，高校の教員はこのようなこともできないのか，わからないのかと唖然とすることもある。双方が驚いたり，あきれたり，悩んだりすることが多い。

考えてみると，「ゆとり教育」のツケは余りにも大きい。高校生になって急に学習法を確立しなさい，改善しなさいといってもこれまでの義務教育9年間で十分には培われていないので，どうしたらよいのかわからない。概念的な問題が苦手であることはもちろんのこと，計算においても正確さやスピードがないから，数学学習に困難を来すことがある。

仮に，高校入試をどうにか答を捻出する勉強法で通過しても，その後にはそのツケを支払うべく，試練が待ち受けている。その第一の試練は何であろうか。それを耐え，突破すれば高校数学を学習する際に，一条の灯りが見えてくるような「数学的な考え方」というものがあるのだろうか。

私にとっては少なくともそれを身に付ければ，当面の挫折を先送りできるのではないかと思うものがある。それは「場合分け」である。これは数学Ⅰの根幹をなすものであるといっても過言ではなかろう。

§3. 高校数学での必須アイテム－場合分け－

中学数学から高校数学へと移項するときに，意識的に身に付けなければならない「探究態度」というのがあると思う。これが意識されて効率的な運用ができなければ，恐らく早期に躓くであろうという代

物である。それは「場合分け」である。

何だ，そんなのは当たり前だろうといわれるだろうが，この「場合分け」という考え方とその運用が高校入学直後の生徒には乏しく，従って適切な処理ができないことが多い。

特に，数学とは問題を解くこと，問題を解くとはただ1つの正解を求めることという認識が強く，〇〇のときは●●，△△のときは▲▲，□□のときは■■という答え方さえ思いつかないことがある。

余談になるが，「分ける」は「分かる」に通じる。分類することは科学することの基本でもある。「場合分け」という「分ける」行為は，数学を「分かる」ための第一歩なのである。

§4. 場合分けの浸透性

この「場合分け」は，どのくらい数学Iで必要な考え方であるかを，つまり数学Iへの浸透具合を調べてみると，次のようになる。

①絶対値

$a \geqq 0$ のとき $|a|=a$，$a<0$ のとき $|a|=-a$

これは，平方根の性質にも出てくる。

②不等式 $ax+b>0$ の解

・$a>0$ のとき，$x>-\dfrac{b}{a}$

・$a=0$ のとき，

$b>0$ ならば全ての実数，$b \leqq 0$ ならば解なし

・$a<0$ のとき，$x<-\dfrac{b}{a}$

③判別式（この名称は使用不可であるが）

・2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の判別や個数の分類

・2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係

・2次不等式の解のパターン

④2次関数の最大・最小

軸と定義域の関係からの場合分け

⑤三角比

鋭角，鈍角による三角比の符号の分類

⑤正弦定理の証明

鋭角，直角，鈍角による場合分け

⑥余弦定理の証明

鋭角，直角，鈍角による場合分け

特に，高1生を悩ませるのが①絶対値，③判別式，④2次関数の最大・最小であるが，それは特に文字を含む場合である。文字だからいろいろな可能性を持っている。だから「場合分け」が不可欠なのである。

学習後，その必要性がわかっていても実際に問題にあたるときに具体的な処理法がわからない，処理法がわかってもこまごまとした計算に手間取って計算ミスがつきまとうことが多い。なにより，根気強く最後までやり遂げようとする姿勢ができていないのである。これが数学力向上に向けて，ネックになる。

07年の国際調査（国際教育到達度評価学会（アムステルダム）から，学力低下には一応歯止めがかかったという文科省の安直な評価があったようであるが，依然として「学ぶ意欲」は低迷している。このような中，数学のように本来は集中した思考力の必要とされる教科は依然回復されていないように思われる。

それを裏付けるように，「勉強が楽しいか」という問いに，「そう思う」「強くそう思う」は小学校4年生では計70％が，中学校2年生では39％に半減し，特に「強く思う」はわずか9％であり，参加国中下から3番目という低さであるという。([1])

ましてや高校生では…。恐らく，楽しく数学を勉強している高校生はほんのわずか数％ということになるであろう。しかし現実には，大学に進学する高校生は約半数である。ごく一部の高校ではそうかもしれないが，ほとんどの高校生は数学に楽しさは見出していないであろう。仮に，できる生徒と他から認められる生徒であっても…。

§5. 場合分けを横断的に

数学Iに限ったわけではなく，「場合分け」という方法は数学にとって不可欠であり，学習項目別に頻繁に出てくる。これを《数学学習における「場合分け」の有用性》というテーマでまとめて，扱うことを行ってみてはどうであろうか。

つまり，横断的に，意識的に「場合分け」を扱えば，思考の整理や数学的な戦略法として活用できて，数学力向上に寄与するのではないか，と思うからである。また，中学生にもそのような「場合分け」，それも文字を使って行う「場合分け」を経験させておくとよいのではないかと思う。

§6. 数学問題解決力育成のために

残念ながらというか驚いたことに，高校2年生になっても数学の勉強方法がわからないという生徒がいる。勉強方法は自ら体得していくものであろうが，それも教えられて然るべきもの，教えない教師が悪いという生徒もいる。よい授業というのは，黙って座っていれば自然にわかって，できるようになるものという妄想さえも抱いている。これも「ゆとり教育」の成せる業なのか？

そこで，「数学勉強指南」という授業も必要なのかもしれない。それに関して，古くは(50年以上前)，G.ポリヤの名著『いかにして問題を解くか(How to Solve It)』が，最近(といっても20年前になるが)では，ローレン・C・ラーソン(秋山仁訳)の『数学発想ゼミナール1，2(Problem-Solving Through Problems)』というのがある。高校1年生が読むにはちょっと困難を伴いそうであるが，高校数学から大学初年級の問題を解決する考え方と具体例が示されていて，数学好きの高校生にはうってつけの参考書になること間違いないと思う。

● 『いかにして問題を解くか(G.ポリヤ著)』

これには，解くための流れが，次の4段階に設定されている。([2])

第1段階：問題理解，第2段階：計画立案

第3段階：計画実行，第4段階：振り返り

なお，各段階での具体的方策は，次のとおりである。

第1段階

①未知の事柄，データ，条件の確認

②図の描写，適切な記号導入　など

第2段階

①同問，類題の想起

②同問，類題の解決経験の想起

③問題換言の可能性吟味

④定義への回帰

⑤関連問題，類題，一般化・特殊化問題，類推的問題への移行，部分的解決の可能性

⑥データ，条件の使い切り

第3段階

各段階の検討

第4段階

①結果の吟味　②他の問題への(結果・方法の)応用可能性の吟味

● 『数学発想ゼミナール(ラーソン著)』

この中から，問題解決の発想法として重要なものをピックアップしてみる。([3])

発見的方法という第1章からは，①規則性の発見，②図の活用，③考えやすい同値な問題への帰着，④適切な修正による問題の簡易化，⑤効果的な記号の導入，⑥対称性の活用，⑦有効な場合分け，⑧遡及，⑨背理法，⑩偶奇性への着眼，⑪極端な場合の分析，⑫一般化が扱われている。

これらは，問題を解決する際の横断的な数学的思考になる。

「有効な場合分け」で扱ってある問題は，

ⓐ与えられた円の1つの弧に対する円周角は同じ弧に対する中心角1/2に等しいことを証明せよ，という「円周角の定理」についてであり，これは高校数学Aで扱っている。他には，

ⓑ有理数上で定義された実数値関数fが，すべての有理数x，yに対して$f(x+y)=f(x)+f(x)$ならば，すべての有理数xに対して$f(x)=f(1)\cdot x$であることを証明せよ。

ⓒ平面上の格子点を3頂点とする三角形を格子三角形という。ある格子三角形があり，この三角形はその内部にI個，境界上にB個の格子点を含むとする。この三角形の面積が$I+B/2-1$であることを示せ，というのがある。

なお，ⓒについては本校がスーパーサイエンスハイスクールに指定されていた時，理数科1年次生40名に対して，探究活動を行わせたものである。1年次生に「場合分け」という方法を確実に身に付け，その有用性を理解してほしいという私の思いで実践したものである。([5])

§7. 場合分けの違い～並列性と直列性～

ここで，場合分けの違いについて考えてみる。

絶対値のときのように，場合1(中身)≧0，場合2(中身)<0のようにそれぞれの場合が互いに関与しないこともあれば，ある場合の考察が別の場合の考察に活用されることもある。

たとえば，正弦定理の証明では，通常(i)Aが鋭角のとき，(ii)Aが直角のとき，(iii)Aが鈍角のときの3つの場合に分けて考察しているが，(iii)の場合は，点Bを通る直径をBDとして四角形ABCDを作り，内接四角形の性質(内接四角形では向かい合う角の

和は 180°)，正弦の性質 ($\sin(180°-A)=\sin A$) を活用するが，別に BD を直径にとる必要はない。辺 BC に関して A とは反対側に点 D をとって四角形 ABCD を作ればよい。

$\angle A+\angle D=180°$，$\angle A$ が鈍角より $\angle D$ は鋭角になる。すると(i)に帰着される。

つまり，(i)での考察結果が(iii)に活用される。教科書どおりであれば，(i)(ii)(iii)は全く独立した印象を受ける。ここで意識させたいのは，「山登り法」である。これは，1つの場合を証明，あるいは解決すれば，その結果が次の場合に活用でき，簡潔に証明または解決できる論法のことである。蛇足であるが，(ii)はポリヤのいう特殊化に当たる。

このように，場合分けをするといっても互いに排反な事象に分け，各事象を証明・解決するという態度もあれば，すでにある事象で証明・解決されたことを別の事象でも活用するという態度もある。前者を「並列的場合分け」，後者を「直列的場合分け」と呼ぶことにする。何でも「並列的場合分け」で扱うのではなく，そのような扱い方が可能な問題であれば「直列的場合分け」を意識させたい。

§8. 直列場合分けの例

数学Ⅲの関数の極限で，『$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$』を扱う。これは三角関数の導関数を求める際に重要な役割を果たす。また「はさみうちの原理」を使う格好の証明問題でもある。弧度法による扇形の面積，三角関数を使った三角形の面積の大小関係から，$\theta>0$ のとき，$\sin\theta<\theta<\tan\theta$ という不等式を得て，さらには不等式 $\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1\cdots(*)$ を得る。

$\theta\to 0$ は，θ が 0 以外の実数をとりながら，0 に限りなく近づくのであるから，($*$) は，はさみうちの原理を使うにしても $\theta\to +0$ の場合にしか使えない。

ここで，$\lim_{x\to a}f(x)=b \iff \lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a-0}f(x)=b$ という知識が必要であり，そこに「場合分け」が発生する。つまり(i)$\theta\to +0$，(ii)$\theta\to -0$ の場合，すなわち $\lim_{\theta\to +0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ と $\lim_{\theta\to -0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ を示すことが必要になる。(i)が示されれば，$t=-\theta$ とおくことで，$\theta\to -0 \iff t\to +0$，

$\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{-\sin\theta}{-\theta}=\frac{\sin(-\theta)}{-\theta}=\frac{\sin t}{t}$ となるから，

$\lim_{\theta\to -0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\lim_{t\to +0}\frac{\sin t}{t}=1$ である。

これは，(i)$\Longrightarrow$(ii)という展開であるから「直列場合分け」である。

§9. おわりに

「場合分け」は別に数学独自の手段ではなく，日常でもよく行っていることであるが，数学という舞台に乗せられると使いこなせない生徒が多い。文字という抽象性が絡むことも苦手意識を助長するのかもしれない。時には，場合分けする必要は知っているのであるが，それを支える数学的理解や遂行力に難点があることも多い。

たとえば，$|x|\geqq 0$ のときと $|x|<0$ のとき，$|2x+1|$ において $x\geqq 0$ のときと $x<0$ のときという場合分けまがいを見かけることがあるが，これらは絶対値の意味の理解不足による。また，2次関数で1次の項に他の変数を含むときや，定義域が $0\leqq x\leqq a$，$a\leqq x\leqq a+1$ のときのように変化するときの場合分けには視覚的イメージが不可欠であるが，そのことを描けないとかグラフに適切に描き込めない，また，場合分けの基準，つまりどのような違いが出るからそのような範囲(場合)を考えるとかが判断できないといった「分からない」生徒が出てくる。これは結局，違いの出る場合に「分けられない」のである。「分けられない」から「分からない」，「分からない」から「分けられない」のである。

個人的には，「分ける」という行為が高校数学の第一歩であると思い，その点を意識した授業を新入生に行っているつもりであるが，そのプロセスよりも結果を，具体的な個々の問題のやり方を覚えようと躍起になっている生徒が少なくないのは残念である。

《参考文献》

〔1〕 学ぶ意欲，なお低迷，朝日新聞，2008.12.10

〔2〕 いかにして問題をとくか，柿内賢信訳，G.ポリヤ，丸善，1954

〔3〕 数学発想ゼミナール1，秋山仁他訳，ローレン・C・ラーソン，シュプリンガー・フェアラーク東京，1986

〔4〕 「たすき掛けによる因数分解」を題材にした中高連携教育の実践，西元教善，第7回啓林館教育実践賞審査員特別賞受賞論文，2008

〔5〕 スーパーサイエンスハイスクール数学分野の実践記，西元教善，太陽書房，2006

(山口県立岩国高等学校)