漸化式の解法について

― 一般解と特殊解を用いて ―

大関(おおせき)　浩二(こうじ)

§1. はじめに

工学部に進学したH君のゼミのテキストに,「ランダムウォークで移動回数の期待値」についての記述があった。

「a, b は正の整数とする。粒子が数直線上で, $X=n\,(-a<n<b)$ にある。粒子は確率 $\frac{1}{2}$ で右の方向か左の方向に1だけ移動する。もし, 粒子が $-a$, b に移動したときはそこから動けなくなる。$-a$, b で吸収されるまでの移動回数の期待値を求めよ。」です。

$X=n$ における期待値を $E(n)$ とすると, 確率 p で $n+1$ に移り, どちらかの吸収壁に至るまでの残りの回数の期待値は $E(n+1)$ となる。

また, 確率 q で $n-1$ に移り, どちらかの吸収壁に至るまでの残りの回数の期待値は $E(n-1)$ となる。したがって, 漸化式

$$\begin{aligned}E(n)&=p\{1+E(n+1)\}+q\{1+E(n-1)\}\\&=1+pE(n+1)+qE(n-1)\end{aligned}$$

を得ます。テキストには, 特に $p=q=\frac{1}{2}$ の場合, 隣接3項間の漸化式

$$E(n)=1+\frac{1}{2}E(n+1)+\frac{1}{2}E(n-1)$$

の解は $-n^2+An+B$ であると書いてあった。

H君から「なぜそうなるのか」と質問されたので考えてみた。

§2. 階差数列を利用して

問題を簡単にするために, 区間 $[0,\ N]$ で移動回数の期待値 $E(n)$ を考えることにしました。それは, 区間 $[-a,\ b]$ を区間 $[0,\ a+b]$ に平行移動し, 出発点を $n+a$ とすれば求まると考えたからです。

ランダムウォークの基本問題

$$E(0)=E(N)=0$$

$$E(n)=1+\frac{1}{2}E(n+1)+\frac{1}{2}E(n-1)$$

$E(n)=1+\frac{1}{2}E(n+1)+\frac{1}{2}E(n-1)$ は

$$\{E(n+1)-E(n)\}-\{E(n)-E(n-1)\}=-2$$

と変形できるので, 数列 $\{E(n+1)-E(n)\}$ は公差 -2 の等差数列である。$E(1)-E(0)=A$ とおくと,

$$E(n+1)-E(n)=-2n+A$$

したがって, $n\geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}E(n)&=E(0)+\sum_{k=0}^{n-1}(-2k+A)\\&=0-2\times\frac{1}{2}n(n-1)+An\\&=n(A+1-n)\quad (n=0\ \text{のときも成り立つ})\end{aligned}$$

確かに n の2次式になり n^2 の係数は -1 となりました。

ここで, $E(N)=0$ であるから $N(A+1-N)=0$

$N>0$ より $A+1=N$ よって $E(n)=n(N-n)$

すなわちH君が解いていた問題の答えは

$$(n+a)\{(a+b)-(n+a)\}=(n+a)(b-n)$$

です。

H君も納得してくれたと思っていましたが, 後日「友達は, もっと簡単に解きました。」というメールが届きました。

簡単に解く方法がありました。

§3. 一般解と特殊解を用いて

高校では $a_{n+1}=2a_n-3$ や $a_{n+1}=2a_n-n$ は

$$a_{n+1}-3=2(a_n-3)$$

$$a_{n+1}-\{(n+1)+1\}=2\{a_n-(n+1)\}$$

と, 等比数列型に変形して一般項を求めています。

$a_{n+1}=2a_n-3$ を $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$ に変形するた

めには，方程式 $\alpha=2\alpha-3$ を作って解く必要があることを説明すると，その**必然性**が理解できない生徒は，「a_n と a_{n+1} は違うのになぜ同じ α にするのか。」と聞いてくる。何度説明しても理解できない生徒がいて，今では「目的の（理想型を作る）ためには手段を選ぶな」と乱暴に言っていました。

でも，$a_n=\alpha$ ならば a_n と a_{n+1} は同じでした。

【例題１】 $f(n)$ が n の１次式

次の漸化式で定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，$n=1, 2, 3, \cdots$ とする。

$$\begin{cases} a_1=1 & \cdots\cdots① \\ a_{n+1}=2a_n+n & \cdots\cdots② \end{cases}$$

漸化式 $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ において，

$f(n)=0$ の場合を**斉次式**

$f(n)\neq 0$ の場合を**非斉次式**

という。

もし，漸化式②を満たす数列 $\{b_n\}$ がひとつでも見つかったとすれば，

$b_{n+1}=2b_n+n$ ……③

ですが，②−③ によって

$a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n)$

が得られます。

$a_n-b_n=c_n$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は

斉次式の漸化式 $c_{n+1}=2c_n$

を満たす数列で，一般解は $c_n=p\cdot 2^{n-1}$ です。そして，数列 $\{a_n\}$ は

$\boldsymbol{a_n=c_n+b_n}$

から得られます。

つまり，②を満たす数列 $\{b_n\}$ の具体例を何でもいいからひとつ見つけてしまえば（①のことは考えなくてよい），$\{a_n\}$ は**「斉次式の漸化式の一般解」と「非斉次式の漸化式の特殊解」の和**で求められるわけです。

【解法】

〔例題１〕は $f(n)$ が１次式の場合ですから，

$\boldsymbol{b_n=An+B}$（１次式）

としてみます。すると

$A(n+1)+B=2(An+B)+n$

$An+(A+B)=(2A+1)n+2B$

任意の n に対して成立することより，

$A=2A+1,\ A+B=2B$

よって，$A=-1,\ B=-1$

ゆえに，特殊解は $b_n=-(n+1)$ です。

斉次式の一般解が $c_n=p\cdot 2^{n-1}$ でしたから

$a_n=c_n+b_n=p\cdot 2^{n-1}-(n+1)$

$a_1=1$（①）を満たすので，

$1=p-(1+1)$ より $p=3$

以上より

$\boldsymbol{a_n=3\cdot 2^{n-1}-(n+1)}$

一番簡単な $a_{n+1}=2a_n-3$ は $f(n)$ が定数なので特殊解も定数 $b_n=\alpha$ とし，方程式 $\alpha=2\alpha-3$ を解くと，$\alpha=3$ より $b_n=3$

$a_{n+1}=2a_n$ の一般解が $c_n=p\cdot 2^{n-1}$ ですから

$a_n=p\cdot 2^{n-1}+3$

初期条件を与えて p を決定します。

a_n と a_{n+1} をともに α とするのは当然なのです。

隣接２項間について例題とその解法を紹介します。

§4. 隣接２項間の漸化式

【例題２】 $f(n)$ が n の２次式

次の漸化式で定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，$n=1, 2, 3, \cdots$ とする。

$$\begin{cases} a_1=3 & \cdots\cdots① \\ a_{n+1}=2a_n-n^2+n & \cdots\cdots② \end{cases}$$

【解法】

まず，非斉次式 $a_{n+1}=2a_n-n^2+n$ の特殊解と斉次式 $a_{n+1}=2a_n$ の一般解をそれぞれ求めます。

②を満たす数列を $\boldsymbol{b_n=An^2+Bn+C}$ とすると，

$A(n+1)^2+B(n+1)+C$

$\quad =2(An^2+Bn+C)-n^2+n$

$An^2+(2A+B)n+(A+B+C)$

$\quad =(2A-1)n^2+(2B+1)n+2C$

任意の n に対して成立することより，

$A=2A-1,\ 2A+B=2B+1,\ A+B+C=2C$

よって，$A=1,\ B=1,\ C=2$

ゆえに，特殊解は $\boldsymbol{b_n=n^2+n+2}$

そして，$a_{n+1}=2a_n$ の一般解は $\boldsymbol{c_n=p\cdot 2^{n-1}}$

したがって

$a_n=c_n+b_n=p\cdot 2^{n-1}+(n^2+n+2)$

$a_1=3$（①）を満たすので，

$3=p+1+1+2$ より $p=-1$

以上より $\boldsymbol{a_n=-2^{n-1}+n^2+n+2}$

【例題 3】 $f(n)$ が指数関数

次の漸化式で定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ とする。

(1) $\begin{cases} a_1=0 & \cdots\cdots① \\ a_{n+1}=2a_n+9\cdot5^n & \cdots\cdots② \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a_1=1 & \cdots\cdots① \\ a_{n+1}=2a_n+3\cdot2^{n+1} & \cdots\cdots② \end{cases}$

【解法】

斉次式 $a_{n+1}=2a_n$ の一般解は $\boldsymbol{c_n=p\cdot2^{n-1}}$

(1) ②を満たす数列を $\boldsymbol{b_n=A\cdot5^n}$ とすると，

$A\cdot5^{n+1}=2A\cdot5^n+9\cdot5^n$，$5A=2A+9$

よって，$A=3$

ゆえに，特殊解は $\boldsymbol{b_n=3\cdot5^n}$

したがって

$$a_n=c_n+b_n=p\cdot2^{n-1}+3\cdot5^n$$

$a_1=0$ を満たすので，$0=p+15$ より $p=-15$

以上より　$\boldsymbol{a_n=3\cdot5^n-15\cdot2^{n-1}}$

(2) ②を満たす数列を $\boldsymbol{b_n=An\cdot2^n}$ とすると，

$A(n+1)\cdot2^{n+1}=2An\cdot2^n+3\cdot2^{n+1}$

$A(n+1)=An+3$ よって，$A=3$

ゆえに，特殊解は $\boldsymbol{b_n=3n\cdot2^n}$

したがって $a_n=c_n+b_n=p\cdot2^{n-1}+3n\cdot2^n$

$a_1=1$ を満たすので，$1=p+6$ より $p=-5$

以上より　$a_n=-5\cdot2^{n-1}+3n\cdot2^n=\boldsymbol{(6n-5)\cdot2^{n-1}}$

§5. 隣接 3 項間の漸化式

隣接 2 項間の漸化式は等比数列型に変形して簡単に解ける。a_n-(特殊解) は等比数列になる。これで終われば，ちょっとだけ早く変形する方法という印象をもつ人が大半でしょう。

では，隣接 3 項間の漸化式はどうでしょう。まず斉次式の場合を確認します。

【例題 4】 斉次式

次の漸化式で定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$とする。

(1) $a_1=2$，$a_2=5$，$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$

(2) $a_1=2$，$a_2=12$，$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$

【解法】

(1) $b_n=r^{n-1}\ (r\neq0)$ が漸化式を満たすとする。

$r^{n+1}-5r^n+6r^{n-1}=0$，$r^{n-1}(r^2-5r+6)=0$

$r^{n-1}(r-2)(r-3)=0$

$r\neq0$ より $r=2,\ 3$

よって，$\{2^{n-1}\}$ と $\{3^{n-1}\}$ は漸化式を満たす。また，$\{A\cdot2^{n-1}+B\cdot3^{n-1}\}$ も

$$\begin{aligned}a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=&(A\cdot2^{n+1}+B\cdot3^{n+1})\\&-5(A\cdot2^n+B\cdot3^n)\\&+6(A\cdot2^{n-1}+B\cdot3^{n-1})=0\end{aligned}$$

より漸化式を満たす。よって

$$a_n=A\cdot2^{n-1}+B\cdot3^{n-1}$$

$\begin{cases} A+B=2 \\ 2A+3B=5 \end{cases}$ つまり　$A=1$，$B=1$

とすれば $a_1=2$，$a_2=5$ が成り立つから

$\boldsymbol{a_n=2^{n-1}+3^{n-1}}$

なる数列 $\{a_n\}$ は与えられた漸化式を満たす。

また，与えられた漸化式を満たす数列は明らかに 1 つしかないからこれが与えられた漸化式の解にほかならない。

(注)　$r^2-5r+6=0$ が隣接 3 項間の漸化式の特性方程式である。

(2) $b_n=r^{n-1}\ (r\neq0)$ が漸化式を満たすとする。

$r^{n+1}-4r^n+4r^{n-1}=0$，$r^{n-1}(r-2)^2=0$

$r\neq0$ より $r=2$

$\{2^{n-1}\}$ が漸化式を満たす。また，数列 $\{n\cdot2^{n-1}\}$ も

$$\begin{aligned}&(n+2)\cdot2^{n+1}-4(n+1)\cdot2^n+4n\cdot2^{n-1}\\&=2^{n+1}\{(n+2)-2(n+1)+n\}=2^{n+1}\times0=0\end{aligned}$$

より，漸化式を満たす。

このことから，数列 $\{An\cdot2^{n-1}+B\cdot2^{n-1}\}$ も与えられた漸化式を満たす。よって

$$a_n=An\cdot2^{n-1}+B\cdot2^{n-1}=\boldsymbol{(An+B)\cdot2^{n-1}}$$

$\begin{cases} A+B=2 \\ 2(2A+B)=12 \end{cases}$ つまり　$A=4$，$B=-2$

とすれば $a_1=2$，$a_2=12$ が成り立つから

$\boldsymbol{a_n}=(4n-2)\cdot2^{n-1}=\boldsymbol{(2n-1)\cdot2^n}$

なる数列 $\{a_n\}$ は与えられた漸化式を満たす。

一般に，漸化式 $a_{n+2}-2\alpha a_{n+1}+\alpha^2a_n=0$ に対して，漸化式を満たす等比数列

$$1,\ r,\ r^2,\ \cdots,\ r^{n-1}\ (r\neq0)$$

はただ 1 つ $\{\alpha^{n-1}\}$ だけ存在する。このとき，数列 $\{n\cdot\alpha^{n-1}\}$ は

$$\begin{aligned}&a_{n+2}-2\alpha a_{n+1}+\alpha^2a_n\\&=(n+2)\cdot\alpha^{n+1}-2\alpha(n+1)\cdot\alpha^n+\alpha^2n\cdot\alpha^{n-1}\\&=\{(n+2)-2(n+1)+n\}\cdot\alpha^{n+1}=0\end{aligned}$$

となり，漸化式を満たす。

隣接 3 項間の漸化式では，斉次式も特殊解を見つ

けることが大切です。

それでは，本題の非斉次式を解いてみましょう。

【例題５】 $f(n)$ が定数

次の漸化式で定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，$n=1, 2, 3, \cdots$とする。

(1) $a_1=3,\ a_2=9,\ a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=6$

(2) $a_1=1,\ a_2=6,\ a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=2$

(3) $a_1=0,\ a_2=3,\ a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=3$

(4) $a_1=1,\ a_2=5,\ a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=-4$

【解法】

(1) $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=6$ を満たす数列を $b_n=A$ とすると，

$A-5A+6A=6$ より $A=3$ ゆえに，$b_n=3$

$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ の一般解は

$c_n=B\cdot 2^{n-1}+C\cdot 3^{n-1}$

したがって

$a_n=c_n+b_n=B\cdot 2^{n-1}+C\cdot 3^{n-1}+3$

$a_1=3,\ a_2=9$ を満たすので，

$B+C+3=3,\ 2B+3C+3=9$ より

$B=-6,\ C=6$

以上より $\boldsymbol{a_n=-3\cdot 2^n+2\cdot 3^n+3}$

(2) $a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=2$ を満たす数列を(1)と同じように $\boldsymbol{b_n=A}$ としてみると，

$A-4A+3A=2$ より $0=2$

となり失敗！ そこで $\boldsymbol{b_n=An+B}$ としてみます。

$\{A(n+2)+B\}-4\{A(n+1)+B\}+3(An+B)=2$

より $-2A=2$ したがって $A=-1$，B は任意。

ゆえに，$b_n=-n$（一番簡単なものは $B=0$ のとき）。

$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$ の一般解は

$c_n=C\cdot 3^{n-1}+D\cdot 1^{n-1}=C\cdot 3^{n-1}+D$

したがって

$a_n=c_n+b_n=C\cdot 3^{n-1}-n+D$

$a_1=1,\ a_2=6$ を満たすので，

$C-1+D=1,\ 3C-2+D=6$ より $C=3,\ D=-1$

以上より $\boldsymbol{a_n=3^n-n-1}$

斉次式の特性方程式 $x^2-4x+3=0$ の解に 1 が含まれると，$b_n=A$ は満たさない。次に 1 次式を考えるが，一般解 c_n に**定数項**が含まれていることから $\boldsymbol{b_n=An}$ と置いてよかったのである。

一般解を先に求めた方が見通しが良くなる場合もある。

(3) $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$ の一般解は

$c_n=(An+B)\cdot 2^{n-1}$

$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=3$ を満たす数列を $b_n=C$ とすると，

$C-4C+4C=3$ より $C=3$

ゆえに $b_n=3$ そして $a_n=(An+B)\cdot 2^{n-1}+3$

$a_1=0,\ a_2=3$ を満たすので，

$A+B+3=0,\ 2(2A+B)+3=3$

より $A=-3,\ B=6$

以上より

$\boldsymbol{a_n=(-3n+6)\cdot 2^{n-1}+3}$

$\boldsymbol{=-3n\cdot 2^{n-1}+3\cdot 2^n+3}$

(4) $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$ は特別な漸化式で $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ と変形でき，数列 $\{a_n\}$ は等差数列である。よって一般解は $c_n=An+B$

$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=-4$ を満たす数列を $b_n=Cn^2$ とすると，

$C(n+2)^2-2C(n+1)^2+Cn^2=-4$

より $2C=-4$ したがって $C=-2$

ゆえに $b_n=-2n^2$ そして $a_n=-2n^2+An+B$

$a_1=1,\ a_2=5$ を満たすので，

$-2+A+B=1,\ -8+2A+B=5$

より $A=10,\ B=-7$

以上より $\boldsymbol{a_n=-2n^2+10n-7}$

【例題６】 $f(n)$ が n の１次式

次の漸化式で定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，$n=1, 2, 3, \cdots$とする。

(1) $a_1=2,\ a_2=0,\ a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=4n+6$

(2) $a_1=1,\ a_2=-4,\ a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=4n-8$

(3) $a_1=-1,\ a_2=5,\ a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=n-3$

(4) $a_1=2,\ a_2=0,\ a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=6n-8$

【解法】

(1) $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=4n+6$ を満たす数列を $b_n=An+B$ とすると，

$\{A(n+2)+B\}-5\{A(n+1)+B\}+6(An+B)$
$=4n+6$

$2An+(2B-3A)=4n+6$

任意の n に対して成立することより，

$2A=4,\ 2B-3A=6$

よって，$A=2,\ B=6$ したがって $b_n=2n+6$

$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ の一般解は

$c_n=C\cdot 2^{n-1}+D\cdot 3^{n-1}$

したがって

$a_n=C\cdot 2^{n-1}+D\cdot 3^{n-1}+2n+6$

$a_1=2$, $a_2=0$ を満たすので,

$C+D+8=2$, $2C+3D+10=0$

より $C=-8$, $D=2$

以上より

$$\boldsymbol{a_n}=-8\cdot 2^{n-1}+2\cdot 3^{n-1}+2n+6$$
$$\boldsymbol{=-2^{n+2}+2\cdot 3^{n-1}+2n+6}$$

(2) $a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$ の一般解は

$c_n=A\cdot 3^{n-1}+B\cdot 1^{n-1}=A\cdot 3^{n-1}+B$

$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=4n-8$ を満たす数列を

$b_n=Cn^2+Dn$ とすると,

$$\{C(n+2)^2+D(n+2)\}-4\{C(n+1)^2+D(n+1)\}+3(Cn^2+Dn)=4n-8$$

$-4Cn-2D=4n-8$

$-4C=4$, $-2D=-8$

よって, $C=-1$, $D=4$ したがって

$b_n=-n^2+4n$

すなわち

$a_n=A\cdot 3^{n-1}-n^2+4n+B$

$a_1=1$, $a_2=-4$ を満たすので,

$A-1+4+B=1$, $3A-4+8+B=-4$

より $A=-3$, $B=1$

以上より　$\boldsymbol{a_n=-3^n-n^2+4n+1}$

(3) $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$ の一般解は

$c_n=(An+B)\cdot 2^{n-1}$

$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=n-3$ を満たす数列を

$b_n=Cn+D$ とすると,

$$\{C(n+2)+D\}-4\{C(n+1)+D\}+4(Cn+D)=n-3$$

$Cn+(D-2C)=n-3$

$C=1$, $D-2C=-3$

よって, $C=1$, $D=-1$ したがって $b_n=n-1$

そして $a_n=(An+B)\cdot 2^{n-1}+n-1$

$a_1=-1$, $a_2=5$ を満たすので,

$A+B=-1$, $2(2A+B)+1=5$

より $A=3$, $B=-4$

以上より

$$\boldsymbol{a_n}=(3n-4)\cdot 2^{n-1}+n-1$$
$$\boldsymbol{=3n\cdot 2^{n-1}-2^{n+1}+n-1}$$

(4) $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$ の一般解は $c_n=An+B$

$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=6n-8$ を満たす数列を

$b_n=Cn^3+Dn^2$ とすると,

$$\{C(n+2)^3+D(n+2)^2\}-2\{C(n+1)^3+D(n+1)^2\}+(Cn^3+Dn^2)=6n-8$$

$6Cn+(6C+2D)=6n-8$

$6C=6$, $6C+2D=-8$

よって $C=1$, $D=-7$

したがって $b_n=n^3-7n^2$　そして

$a_n=n^3-7n^2+An+B$

$a_1=2$, $a_2=0$ を満たすので,

$1-7+A+B=2$, $8-28+2A+B=0$ より

$A=12$, $B=-4$

以上より　$\boldsymbol{a_n=n^3-7n^2+12n-4}$

【例題7】 $f(n)$ が指数関数

次の漸化式で定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし, $n=1, 2, 3, \cdots$とする。

$a_1=0$, $a_2=12$, $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=6\cdot 5^n$

【解法】

$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=6\cdot 5^n$ を満たす数列を

$b_n=A\cdot 5^n$ とすると,

$A\cdot 5^{n+2}-5A\cdot 5^{n+1}+6A\cdot 5^n=6\cdot 5^n$, $6A\cdot 5^n=6\cdot 5^n$

よって, $A=1$ ゆえに, $b_n=5^n$

$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ の一般解は

$c_n=B\cdot 2^{n-1}+C\cdot 3^{n-1}$

したがって $a_n=5^n+B\cdot 2^{n-1}+C\cdot 3^{n-1}$

$a_1=0$, $a_2=12$ を満たすので,

$5+B+C=0$, $25+2B+3C=12$ より

$B=-2$, $C=-3$

以上より $\boldsymbol{a_n}=5^n-2\cdot 2^{n-1}-3\cdot 3^{n-1}\boldsymbol{=5^n-3^n-2^n}$

§6. おわりに

H君が質問した「ランダムウォークで移動回数の期待値」の問題は〔例題5〕の(4)の特性方程式が1を重解にもつタイプの問題です。Studyaid D. B. 数学で検索すると, 3件見つけました。

宇都宮大(2000), 武蔵工業大(2001), 工学院大(2006)

いずれも, $b_n=a_{n+1}-a_n$ に注目させています。このような誘導があれば, 大学入試でも大丈夫です。

《参考文献》

〔1〕 高橋健人　新数学シリーズ20　差分方程式　培風館