$y=f(x)e^x$ の形で表される関数の導関数や不定積分について

宮田(みやた)　毅一郎(きいちろう)

§1. はじめに

本校の場合，数学III選択者の多くは推薦入試等で工学部に進学するが，このような生徒は進学後に「微積分」を理解できないと苦労するという現実がある。どんな教科書や問題集を使用しても扱う関数は，整関数や三角関数，指数・対数関数等の基本的なものやそれらの組み合わせである。指導する立場から見れば，一直線に正答にたどりつけるよう指導するがために，教科書中心，問題演習型学習の実践の頻度が高くなりがちである。

しかし，生徒の今後を考え，同じ関数を扱うにしても切り口を変え，特に，汎用性のある問題に少しでもその出題に意図や背景を込め，授業をしたいと考えている。

本稿ではその題材の1つとして $(e^x)'=e^x$ という性質に注目して，$y=f(x)e^x$ の形で表される関数を中心にその導関数や不定積分について考察した内容をまとめてみる。

§2. 微分方程式とその解

関数 $y=e^x\cos x$ は $$y''-2y'+2y=0$$ を満たすことを示せ。

関数 $y=e^{-x}\sin 2x$ が $$y''+ay'+by=0$$ を満たすとき，定数 a，b を求めよ。

という類の問題が，高次導関数の問題として扱われることが多い。y' や y'' を求め，それを左辺に代入して計算していくだけであるが，下記に述べる2階線形微分方程式の1つである定係数2階同次微分方程式の解の公式が題材となっている。

定係数2階同次微分方程式の解

微分方程式

$$y''+ay'+by=0 \quad (a,\ b:\text{実数})$$

とその特性方程式

$$\lambda^2+a\lambda+b=0$$

の2つの解 λ_1，λ_2 について

(i) λ_1，λ_2 が相異なる実数解(判別式 $D>0$)のとき

基本解は　$e^{\lambda_1 x}$，$e^{\lambda_2 x}$

一般解は　$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_1 x}$

(C_1，C_2：任意定数)

(ii) 重解(判別式 $D=0$)のとき

基本解は　$e^{\lambda_1 x}$，$xe^{\lambda_1 x}$

一般解は　$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2xe^{\lambda_1 x}$

(C_1，C_2：任意定数)

(iii) 共役な複素数解(判別式 $D<0$)のとき

$\lambda_1=\alpha+i\beta$，$\lambda_2=\alpha-i\beta$ とおくと

基本解は　$e^{\alpha x}\cos\beta x$，$e^{\alpha x}\sin\beta x$

一般解は　$y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$

(C_1，C_2：任意定数)

これより

$$e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x},\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ e^{\alpha x}\cos\beta x$$

の形をした関数の第2次までの導関数を正しく計算できなければ，求めた解が微分方程式を満たしているか確認できない。そこで，基本的な関数はもちろんのこと，$(e^x)'=e^x$ に注目して本質を見失わないように，少なくとも $y=f(x)e^x$ の形で表される関数の第2次までの導関数を，できれば第 n 次導関数までを見通して欲しいと思っている。

※　この微分方程式の解を求めるにあたり，隣接3項間漸化式

$$x_{n+2}+ax_{n+1}+bx_n=0$$

と同様に特性方程式を解き求めている。つまり，隣接3項間漸化式と同じ構造である。生徒にとって，数学Bで扱う隣接3項間漸化式は難しい題材である。

§3. 第3次までの導関数

下記の問題は，過去に幾度となく数学IIIの定期考査で出題した問題です。

> **問題1**　関数 $y=xe^x$ の第3次までの導関数を求めよ。また，第 n 次導関数を推定せよ。
> (推定は答えのみでよい)

〔解答〕

(1)　$y'=(x)'e^x+x\cdot(e^x)'=1\cdot x+xe^x=(x+1)e^x$

(2)　$y''=(x+1)'e^x+(x+1)\cdot(e^x)'$
$=1\cdot x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

(3)　$y'''=(x+2)'e^x+(x+2)\cdot(e^x)'$
$=1\cdot x+(x+2)e^x=(x+3)e^x$

(4)　$y^{(n)}=(x+n)e^x$

> **問題2**　関数 $y=x^2e^x$ の第3次までの導関数を求めよ。

〔解答〕

(1)　$y'=2x\cdot e^x+x^2\cdot(e^x)'=(x^2+2x)e^x$

(2)　$y''=(2x+2)e^x+(x^2+2x)\cdot e^x$
$=(x^2+4x+2)e^x$

(3)　$y'''=(2x+4)e^x+(x^2+4x+2)\cdot e^x$
$=(x^2+6x+6)e^x$

ともに，教科書レベルの出題であるが，前者の問題(4)では，推定後に「それが正しいことを，数学的帰納法を用いて証明せよ。」と続けて出題するのが理想だろう。(1)～(3)において，正しく計算できることはもとより，証明はできなくとも推定はできて欲しいと思っている。また，後者では更に第 n 次導関数の推定は難しいと判断し出題したことがない。いずれも作成時に予想していた正答率を下回ったことで，今後の指導方法を考える題材の1つと考えている。

§4. ライプニッツの公式

積の導関数の公式を用いた問題として，下記のような問題がある。

> **問題3**　下記のように，$f(x)g(x)\,(=fg)$ を繰り返し微分するとどうなるか求めよ。
> (1)　$(fg)'$　　(2)　$(fg)''$　　(3)　$(fg)'''$

〔解答〕

(1)　$(fg)'=f'g+fg'$

(2)　$(fg)''=(f'g+fg')'$
$=f''g+f'g'+f'g'+fg''$
$=f''g+2f'g'+fg''$

(3)　$(fg)'''=(f''g+2f'g'+fg'')'$
$=f'''g+f''g'+2f''g'+2f'g''+f'g''+fg'''$
$=f'''g+3f''g'+3f'g''+fg'''$

ここに出てくる係数は，$(a+b)^n$ を展開したときの各項の係数と一致し，2項定理と同様に数学的帰納法によって証明することができる。積の微分の公式を高階導関数に拡張したものとして下記の公式が知られている。

ライプニッツ (Leibniz) の公式

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}g^{(k)}$$

> **問題4**　ライプニッツの公式において，$g=e^x$ とおくとき，$(e^x)'=e^x$ であることを用いて，$y=f(x)e^x$ の形で表された関数の導関数を考えてみよ。

〔解答例〕

(1)　$y'=(f+f')e^x$

(2)　$y''=(f+2f'+f'')e^x$

(3)　$y'''=(f+3f'+3f''+f''')e^x$

(4)　$y^{(n)}=\left(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}\right)e^x$

上記を踏まえて，再度2題を解答してみます。

> **問題1′**　関数 $y=xe^x$ の第3次までの導関数を求めよ。また，第 n 次導関数を推定せよ。

〔解答〕

$$(x)^{(n)}=\begin{cases}1 & (n=1)\\ 0 & (n\geqq 2)\end{cases}\quad より$$

(1)　$y'=\{x+(x)'\}e^x=(x+1)e^x$

(2)　$y''=\{x+2(x)'\}e^x=(x+2)e^x$

(3)　$y'''=\{x+3(x)'\}e^x=(x+3)e^x$

(4)　$y^{(n)}=\{x+n(x)'\}e^x=(x+n)e^x$

> **問題 2′**　関数 $y=x^2e^x$ の第 3 次までの導関数を求めよ。

〔解答〕

$$(x^2)^{(n)}=\begin{cases}2x & (n=1)\\ 2 & (n=2)\\ 0 & (n\geqq 3)\end{cases}\quad より$$

(1)　$y'=\{x^2+(x^2)'\}=(x^2+2x)e^x$

(2)　$y''=\{x^2+2\cdot(x^2)'+(x^2)''\}=(x^2+4x+2)e^x$

(3)　$y'''=\{x^2+3\cdot(x^2)'+3(x^2)''\}=(x^2+6x+6)e^x$

さらに，ライプニッツの公式を用いれば，

$$\begin{aligned}y^{(n)}&=\{x^2+{}_nC_1\cdot(x^2)'+{}_nC_2\cdot(x^2)''\}e^x\\&=\{x^2+2nx+n(n-1)\}e^x\end{aligned}$$

と表すことができる。

$y=f(x)e^{-x}$ の形で表された関数の導関数ならば，合成関数の微分法より

(1)　$y'=(f-f')e^x$

(2)　$y''=(f-2f'+f'')e^x$

(3)　$y'''=(f-3f'+3f''-f''')e^x$

となり，出てくる係数は $y=f(x)e^x$ の場合と同様に $(a-b)^n$ を展開したときの各項の係数と一致する。

また，$y=f(x)e^{mx}$ の形の場合は

$$y'=(mf+f')e^{mx}$$
$$y''=(m^2f+2mf'+f'')e^{mx}$$

のようになるが，本質さえ押さえておけば，$y=f(x)e^{mx}$ の形までに拡張して，扱う必要はないと考える。

また，$f(x)=\sin x$ とおいた場合だと次のようになる。

> **問題 5**　関数 $y=e^x\sin x$ の第 3 次までの導関数を求めよ。

〔解答〕

(1)　$y'=\{\sin x+(\sin x)'\}e^x=e^x(\sin x+\cos x)$

(2)　$y''=\{\sin x+2(\sin x)'+(\sin x)''\}e^x=2e^x\cos x$

(3)　$y'''=\{\sin x+3(\sin x)'+3(\sin x)''+(\sin x)'\}e^x$
$\quad=2e^x(-\sin x+\cos x)$

※　$y'=\{\sin x+(\sin x)'\}e^x=e^x(\sin x+\cos x)$

$$=e^x\left\{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\sqrt{2}\,e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y''=\sqrt{2}\,e^x\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=(\sqrt{2})^2e^x\sin\left(x+\frac{2\pi}{4}\right)$$

$$y'''=(\sqrt{2})^2e^x\left\{\sin\left(x+\frac{2\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=(\sqrt{2})^3e^x\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$$

となることより，

$$y^{(n)}=(\sqrt{2})^ne^x\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

となることが類推できる。$y=e^x\sin x$ の第 n 次導関数を求める際はライプニッツの公式よりもこのように計算した方が類推しやすいといえる。

§5. 不定積分

微分について考察したので，逆演算である積分についても考察してみる。

> **問題 6**　部分積分法を利用して，次の不定積分を求めよ。
> (1)　$\int xe^x\,dx$　　　(2)　$\int x^2e^x\,dx$

〔解答〕

(1)　$\int xe^x\,dx=\int x(e^x)'\,dx=xe^x-\int e^x\,dx$
$\quad=xe^x-e^x+C=(x-1)e^x+C$

(2)　$\int x^2e^x\,dx=\int x^2(e^x)'\,dx=x^2e^x-\int 2xe^x\,dx$
$\quad=x^2e^x-2(x-1)e^x+C$
$\quad=(x^2-2x+2)e^x+C$　（C：任意定数）

ここで，部分積分法を使わない方法を考えてみます。

> $f(x)$ を整式とする。
> $$(f(x)-f'(x)+f''(x)-\cdots)e^x$$
> を積の微分法で計算したとき，
> $$(f'(x)-f''(x)+f'''(x)-\cdots)e^x+(f(x)-f'(x)+f''(x)-\cdots)e^x$$
> $$=f(x)e^x$$
> より $f(x)e^x$ の原始関数の 1 つは

$(f(x)-f'(x)+f''(x)-\cdots)e^x$

となる。

上記を踏まえて，再度２題を解答してみます。

問題6′　公式を用いて，次の不定積分を求めよ。

(1) $\int xe^x\,dx$　　　(2) $\int x^2e^x\,dx$

〔解答〕

(1) $f(x)=x$ のとき，$f'(x)=1$ であることより xe^x の原始関数の１つは $(x-1)e^x$ であるから

$$\int xe^x\,dx=(x-1)e^x+C$$

(2) $f(x)=x^2$ のとき，$f'(x)=2x$，$f''(x)=1$ であることより x^2e^x の原始関数の１つは $(x^2-2x+2)e^x$ であるから

$$\int x^2e^x\,dx=(x^2-2x+2)e^x+C$$

これらと同様に行えば，部分積分法の繰り返しで求めることが大変な計算である $\int x^3e^x\,dx$ も

$$\int x^3e^x\,dx=(x^3-3x^2+6x-2)e^x+C$$

と求めることができる。また，拡張する下記のような公式も作ることができる。

公式　$f(x)$ を整式とする。$f(x)e^{mx}$ の原始関数の１つは

$$\left(\frac{f(x)}{m}-\frac{f''(x)}{m^2}+\frac{f'''(x)}{m^3}-\cdots\right)e^{mx}$$

しかし，$f(x)=\sin x$ のような場合，

$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$　または

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\sin x & (n=4k)\\ \cos x & (n=4k+1)\\ -\sin x & (n=4k+2)\\ -\cos x & (n=4k+3)\end{cases}\quad (k\text{は正の整数})$$

と表せるが，$(f(x)-f'(x)+f''(x)-\cdots)$ が確定できないのでこの公式は使えない。そこで，下記のような定番といえる問題のときは，部分積分法を使わざるを得ない。

問題７　$I=\int e^x\sin x\,dx$，$J=\int e^x\cos x\,dx$ であるとき，I，J を求めよ。

〔解答〕

$$I=\int e^x\sin x\,dx=\int (e^x)'\sin x\,dx$$
$$=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx=e^x\sin x-J$$
$$J=\int e^x\cos x\,dx=\int (e^x)'\cos x\,dx$$
$$=e^x\cos x-\int e^x(-\sin x)\,dx=e^x\cos x+I$$

よって，$I=e^x\sin x-J$　……①

$J=e^x\cos x+I$　……②

①－② から

$2I=e^x(\sin x-\cos x)$

①＋② から

$2J=e^x(\sin x+\cos x)$

積分定数も考えて

$$I=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$$
$$J=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C\quad (C：任意定数)$$

注　$I=\int e^x\sin x\,dx$ だけ求めれば良いときは，部分積分を２回繰り返して $2I=e^x(\sin x-\cos x)$ として求める。

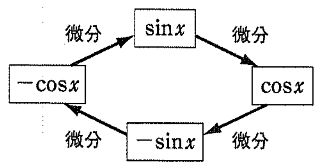
§6．図によるイメージ

授業において，三角関数の微分・積分を扱うにあたり，積分定数を念頭において

$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$

$\int\sin x\,dx=-\cos x+C$，$\int\cos x\,dx=\sin x+C$

といった事実をイメージするものとして，下記のような図を用いている。



※矢印の逆の方向は微分の逆演算（積分）になる。

［図１］ $\sin x$，$\cos x$ の微分・積分のイメージ

同様に，他の関数でもできないかと考えている。そこで，下記の２つの例を考えてみた。

xe^x の微分・積分のイメージは

$$(xe^x)'=(x+1)e^x$$

$$\int xe^x\,dx=(x-1)e^x+C$$

等により下記の図のように直線的な配置になる。

$$\cdots(x-1)e^x \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}} xe^x \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}} (x+1)e^x \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}} (x+n)e^x\cdots$$

［図２］ xe^x の微分・積分のイメージ

さらに，$y=e^x\sin x$ の微分・積分のイメージは

$$y^{(n)}=(\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

であり，$y^{(n)}=e^x(a_n\sin x+b_n\cos x)$ とおくと，

$$y'=\{\sin x+(\sin x)'\}e^x=e^x(\sin x+\cos x)$$

$$y''=\{\sin x+2(\sin x)'+(\sin x)''\}e^x=2e^x\cos x$$

$$y'''=\{\sin x+3(\sin x)'+3(\sin x)''+(\sin x)'\}e^x$$

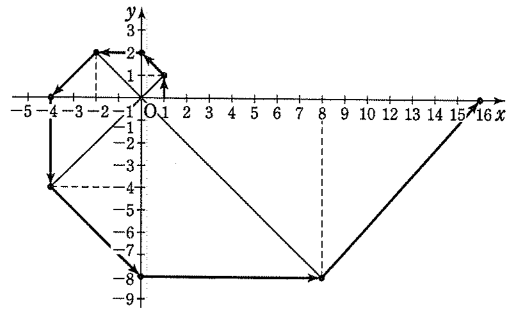
$$=2e^x(-\sin x+\cos x)$$

であるので，

$(a_0,\ b_0)=(1,\ 0)$，$(a_1,\ b_1)=(1,\ 1)$，

$(a_2,\ b_2)=(0,\ 2)$，$(a_3,\ b_3)=(-2,\ 2)$

となり，それを座標に表示すると，各点は $\frac{\pi}{4}=45°$ ずつ回転しながら，原点との距離は $\sqrt{2}$ 倍ずつにしながら，下記の図のように渦を巻くような形になる。



※矢印の方向と逆は微分の逆演算（積分）になる。

［図３］ $e^x\sin x$ の微分・積分のイメージ

公式に基づいて計算するにあたり，先のような図を元に計算結果を予想できれば，計算ミスにも気づき易いと思われる。

《参考文献》

〔１〕 栗田哲也，福田邦彦，坪田三千雄著「大学への数学　微積分／基礎の極意」東京出版　2000

（金沢市立工業高等学校）