重複組合せの視覚的解法

数野（かずの）　裕之（ひろゆき）

§1. はじめに

教科書等の模範解答は非常にスマートな解法をとっており，それ自体は非の打ち所がない。しかし，そこにいたるまでに実際は，あれこれ考えながら，手を動かしながら，時にはノートを何ページも使いながら試行錯誤し，苦労の末に最終的な解法にいたる場合がほとんどである。これが数学の楽しみでもあるが，その際，視覚というものが大きく幅をきかせる場合が結構ある。1つの典型的な例として取り上げてみたい。

§2. 重複組合せの模範解答

数学Aで扱う典型的な問題を取り上げる。

問題1　$x+y+z=10$ となる x，y，z の組はいくつあるか。ただし，x，y，z は非負の整数とする。
問題2　$x+y+z=10$ となる x，y，z の組はいくつあるか。ただし，x，y，z は正の整数とする。

注意　0を含めるか含めないかが問題1と問題2の違いである。またこれが，場合によっては「りんご，もも，なしを合わせて10個買うときに何通りの買い方があるか」という問題に変化する。

模範解答（問題1）

例えば，$(x,\ y,\ z)=(5,\ 2,\ 3)$ という解を

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{x}\,|\,\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{y}\,|\,\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{z}$$

また，$(x,\ y,\ z)=(7,\ 0,\ 3)$ という解を

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{x}\,|\ |\,\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{z}$$

と表すことにする。

すると，この10個の○と2個の|（合計12個）を並べたものが，x，y，z の組と1対1に対応する。よって，求める総数は

$${}_{12}C_{10}={}_{12}C_{2}=66\text{（通り）}$$ ■

模範解答（問題2）

$x=1$，$y=1$，$z=1$ を取り除けばあとは，

$x+y+z=7$（x，y，z は非負の整数）

となり，問題1と同様にできる。求める総数は

$${}_{9}C_{7}={}_{9}C_{2}=36\text{（通り）}$$ ■

模範解答その2（問題2）

例えば，$(x,\ y,\ z)=(5,\ 2,\ 3)$ という解を

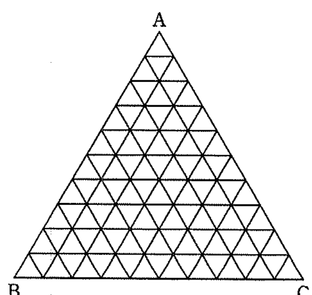
$$\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\underset{\wedge}{}\bigcirc\bigcirc\underset{\wedge}{}\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$

で表す。つまり○と○の間の9つのすきまから2カ所を選んで∧という記号を書く。この総数は求める x，y，z の組と1対1に対応するので，求める総数は ${}_{9}C_{2}=36$（通り） ■

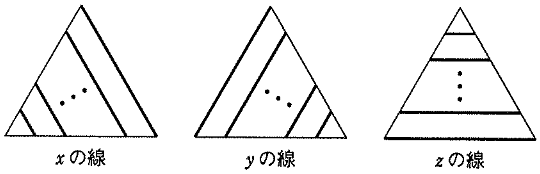
§3. 視覚による解法

三角形ABCの各辺を10等分し，（図1）のように線分で結ぶ。この線分のうち，

$$\left(\begin{array}{l}\text{CA に平行な線を「}x\text{の線」}\\ \text{AB に平行な線を「}y\text{の線」}\\ \text{BC に平行な線を「}z\text{の線」}\end{array}\right)\text{と呼ぶ。…（図2）}$$



（図1）

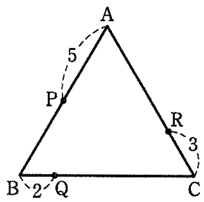


(図 2)

ここで，例えば $(x,\ y,\ z)=(5,\ 2,\ 3)$ という解を次のように考える。

$\begin{cases} x=5 \text{ なのでAからBに向かって5だけ進んだ点をP} \\ y=2 \text{ なのでBからCに向かって2だけ進んだ点をQ} \\ z=3 \text{ なのでCからAに向かって3だけ進んだ点をR} \end{cases}$

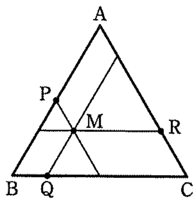
とする。…(図 3)



(図 3)

ここで，Pから「xの線」，Qから「yの線」，Rから「zの線」を引き，交わった点をMとする。

…(図 4)



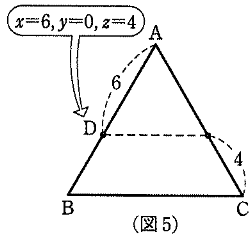
(図 4)

注意　Mは必ず1点になる。つまり，「xの線」と「yの線」を引いて交わった点がMであり，「zの線」は必ずMを通る。よって「zの線」を引く必要はないが，便宜上引くとわかりやすい。

以上の操作によって問題1の解と(図1)のすべての点が1対1に対応する。したがって，(図1)の三角形内にある点の個数が問題1の解になる。

なお，問題1と問題2の違いは，△ABCの辺上の点および頂点の点を認めるか認めないかによる。

例えば，$x=6,\ y=0,\ z=4$ は，問題1の解であるが，問題2の解ではない。この点Dは，辺AB上にある。…(図 5)

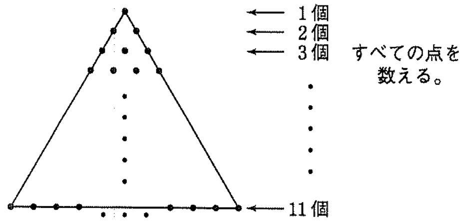


(図 5)

以上の考察により，問題1，問題2の解は次のようになる。

問題1の解法

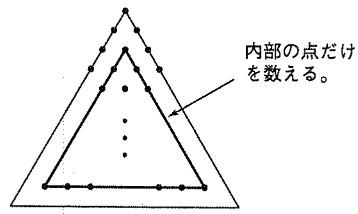
$$1+2+3+\cdots\cdots+11=\frac{11\cdot12}{2}=66\ (個)\cdots(図\ 6)$$



(図 6)

問題2の解法

$$1+2+3+\cdots\cdots+8=\frac{8\times9}{2}=36\ (個)\cdots(図\ 7)$$



(図 7)

なお，問題1も問題2も最終項に注意する。この場合では，問題1は11，問題2は8が最終項となっている。これを一般化する。

重複組合せの考え方（その1）

与えられた正の整数 n に対し，$x+y+z=n$

(x，y，z は非負整数) を満たす x，y，z の組は

$$1+2+3+\cdots\cdots+n+(n+1)$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\ (個)\cdots(図\ 8)$$

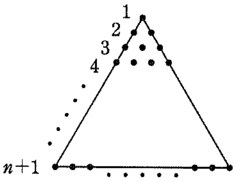
重複組合せの考え方（その2）

与えられた正の整数 $n\ (n\geqq3)$ に対し，

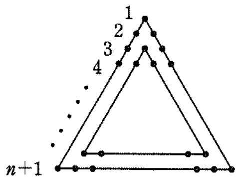
$$x+y+z=n$$

(x，y，z は正の整数) を満たす x，y，z の組は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-2)$$
$$=\frac{(n-2)(n-1)}{2}\ (個)\cdots(図\ 9)$$

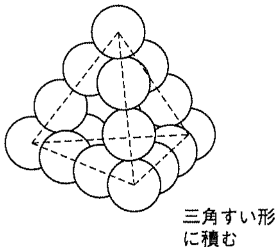


(図8)



(図9)

数学Aでは，x，y，z の3つの文字のパターンが多いが，さらに u が加わって，文字が4個になった場合は，これを立体化する必要がある。球を積み重ねる方法がよい。…(図10)

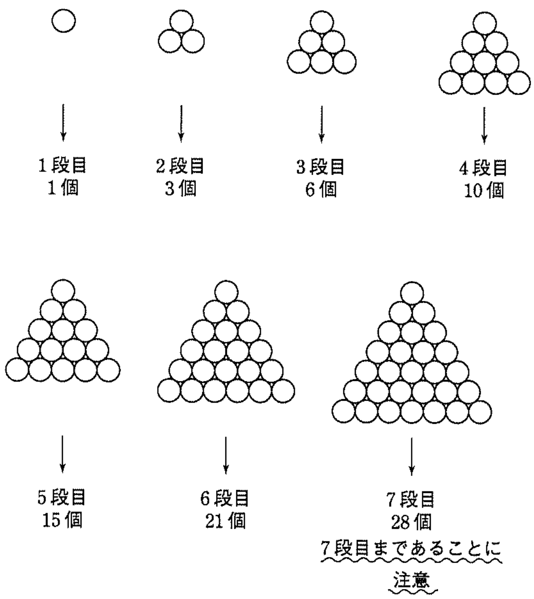


(図10)

> **問題3**　$x+y+z+u=6$ を満たす非負の整数 x，y，z，u の組の総数を求めなさい。

解法

三角すい形に積んだ球の数を数えればよい。ただし，最下段は7段目であることに注意する。



よって求める総数は

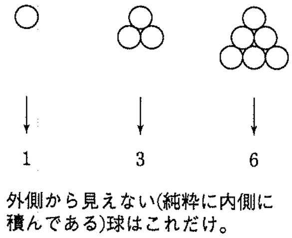
$1+3+6+10+15+21+28=84$ (個)

> **問題4**　$x+y+z+u=6$ を満たす正の整数 x，y，z，u の組の総数を求めなさい。

解法

これは問題3において，0を認めない場合である。したがって，7段積んだ場合，内側に積んである球(外側から見えない球)のみを数えると，

$1+3+6=10$ (個)



§4. おわりに

実際の授業では，教科書にある典型的な模範解答を解説した後，「こういう解法もあるよ」という形で取り上げた。私は，別解はできるだけ多く取り扱ったほうが生徒の力がつくと考えている。特に視覚的な解法は，考える上でも有効である。

今回この解法は，地理の授業で扱う「地図帳」のページを見てひらめいた。…(図11)

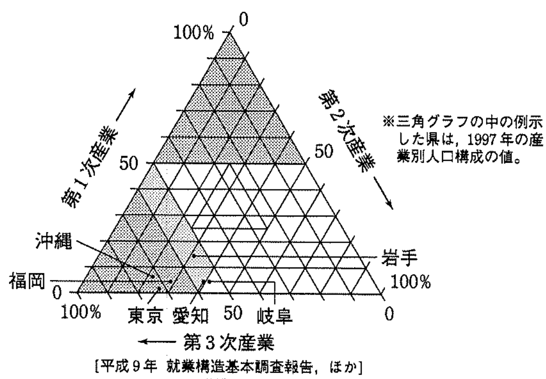
なお，計算の途中で出てくる

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

などの公式は数学Bの範囲ではあるが，教材を扱う上でのよい材料になる。

さらに，$x+y+z+u+v=10$ などという，未知数が5個，あるいはそれ以上の場合はどうなるかということについては，各生徒の課題とした。

『新詳高等地図　初訂版』$p.94$ の表 引用



(図11)

《参考文献》

〔1〕 新詳高等地図　初訂版　帝国書院編集部編

(埼玉県立越谷北高等学校)