確率の扱い方

吉田　豊（よしだ　ゆたか）

§0. はじめに

高校数学で扱われるさまざまな分野において一度苦手意識がつくと，もっとも習得に時間がかかり，数学を得意とする生徒にとっても最後の難関といってよいのが場合の数と確率であろう。今回はその中でも最も出題頻度が高い確率の求め方と，その際に陥りやすい間違いについて検証していく。

§1. 確率の求め方について

確率の求め方は大きく分けて３つある。

[1]　$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(U)} \Rightarrow \dfrac{\text{事象}A\text{が起こる場合の数}}{\text{全通り}}$

つまり，分子と分母を別々に計算し求める。

[2]　$P(A)=P(B)\times P(C)\times\cdots \Rightarrow$ 事象 B が起こってから事象 C が起こる，つまり順番を考慮して連続する確率の積で求める（問題文中に～回目，～番目などの順番を示すワードがある）。

[3]　$P(A)={}_n\mathrm{C}_r p^{n-r}(1-p)^r \Rightarrow$ 反復試行，つまり順番を考慮せず，事象が起こる回数のみを考慮して確率の積で求める（問題文中に～回，～勝などの回数を示すワードがある）。

この中でもっとも入試においての出題頻度が高く，重要といえるのが[1]であるといえる。そこで[1]について（特に分母について）より詳述していく。

§2. $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(U)}$ について

この求め方をおこなう確率についても，分母の全事象 $n(U)$ についてさらに３つのパターンに分けることができる。

(i)　$n(U)$ を ${}_n\mathrm{C}_r$ で求めるタイプ ⇒ ～を選ぶ（取り出す）確率

(ii)　$n(U)$ を $n!$ で求めるタイプ ⇒ ～を並べる確率

(iii)　$n(U)$ を n^r で求めるタイプ ⇒ サイコロを振ったときなどに用いる確率

ここで注意すべきは分母を決めてから分子を求めるということである。

> 【例】　赤球４個と白球３個が入っている袋から３個取り出すとき，その球が赤球２個と白球１個となるときの確率を求めよ。

これは先ほど述べた(i)のタイプの基本例題で解答は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{18}{35}$$

となる。

ここで，場合の数を求めると，赤球２個と白球１個となるのは赤球，白球それぞれに区別がないため１通りとなる。つまり，$\dfrac{\text{事象}A\text{が起こる場合の数}}{\text{全通り}}$ という解釈は正確にいえば間違いということになる。

その他，（見た目区別のつかない）２つのサイコロを振って出た目の和が３となる場合の確率で，分子は１通りですか？といった質問を受けたことがあるが，それも全く同様のことである。そこで，最も注意しなければならないことは分子と分母のバランスであり，“すべての要素を区別すること”この１点が確率を求めることの大原則である。

つまり，分母，分子の（正しい）場合の数をあてはめると確率に矛盾が生じる場合があるので，すべての要素を区別するのである。

ではなぜ“すべての要素を区別すること”は確率の値で正解に導くことができるのか？であるが，分母である全事象すべてが等確率でなければならないという原則があり，それを可能にするのが“すべての要素を区別すること”なのである。（区別のつかない２つのサイコロの出た目の和の確率をイメージすれば簡単！）しかるに，確率は分母を基本にして分子を求めるといった性質はこれにより発生する。

§3. 実際に解いてみる

ここで，以上のべてきた注意点を順に叩き込んでおかなければ正解にたどりつけない例題を紹介しておく。ぜひお試しいただきたい。

> **【例題】** 5個の白球をA，B，Cの箱に入れていく。ただし，1個も入らない箱があってもよいものとする。
> (1) すべての球がAの箱に入っている場合の確率を求めよ。
> (2) Aの箱に2個の球が入っている場合の確率を求めよ。

【解答】

(1) $\frac{1}{3^5}=\frac{1}{243}$

(2) $\frac{{}_5C_2\times 2^3}{3^5}=\frac{80}{243}$

となるが，これを正解する生徒はほとんどいないと考えられる。実際に某予備校が行う記述形模試で偏差値60付近の生徒30名に出題したところ，正解者0名という結果になった。誰もが陥りやすい不正解を導くメカニズムについて解説する。

〈解説〉

まず全通り，つまり重複を含んで5個の白球をA，B，Cの箱に入れていく場合の数を求める。

これは，重複組合せということになり，5つの○と2本のしきりの並べ方で求めることになる。

具体例として

Aの箱に2個，Bの箱に3個，Cの箱に0個の場合

A　　B　　C
○　○｜○　○　○｜

したがって，同じものを含む順列ということになり，ここでいう全通りは $\frac{7!}{5!\times 2!}=21$ 通りということになる。

つまり，この正しい全通りから確率を求めようとすると，

(1)は $\frac{1}{21}$

(2)は $\frac{4}{21}$（分子はBの箱に0～3個入ることより，数え上げで求める）

となり，ある程度力のある生徒のほとんどがこの解答をもって不正解となる。

ここでは全通りの求め方として，当然球に区別がない。よって上のように重複組合せとして21通りが導き出せる。しかし，これを確率の分母として使用できない理由は，21通りがすべて同じ確率で起こらないことによるのである。（Aの箱のみに5個入る確率＜Aの箱に2個，Bの箱に2個，Cの箱に1個入る確率は容易にイメージできるはず）

5個の球を区別してはじめて分母の事象がすべて同じ確率となるのである。

§4. まとめ

確率を求める上での原則とは，与えられているすべてのものを区別することである。

それゆえ，必ずしも全事象となる場合の数が分母の値とはならないということになる。

そして，特にこのタイプで気を付けなければならない問題として，確率を求める事象に区別できるもの（するもの）と区別できないもの（しないもの）が混在している場合が挙げられる。((例)サイコロは区別しないが，サイコロの目は6通りに区別する。球の色は区別するが，同じ色の球どうしは区別しない。など）さらに，この中で最も複雑なパターンの1つとして重複組合せが挙げられる。そしてこれを用いた確率の分母はすべての事象を区別し，重複順列となる。

ここまで記述してきたことは，確率を導くに際して，分母を求めるだけでも複雑で，難関であるということではない。所詮分母の求め方は§2で述べた(i)～(iii)の3パターンしかない（${}_nP_r$ で求めるタイプは ${}_nC_r$ と $n!$ の融合したものであるし，確率の問題では性質上出題されることが少ないので略)。そして，それを基に分子を考えていく。ゆえにシンプルに解答できるはずである。

このように与えられているすべてのものを区別することは解法をシンプルに理解することの手助けになり，またそう区別しなければならない理由はただひとつ，確率の分母である事象がすべて同じ確率で起こらなければならないということにほかならない。

（鳥取県立鳥取工業高等学校）