2次の正方行列と1次分数関数の相性

田代（たしろ） 久人（ひさと）

§1. はじめに

2次の正方行列の積と1次分数関数の合成に関しては相性がよいことはよく知られている。

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とすると，

$$AB=\begin{pmatrix} \boldsymbol{ap+br} & \boldsymbol{aq+bs} \\ \boldsymbol{cp+dr} & \boldsymbol{cq+ds} \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{-c} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \quad (\Delta \neq 0 \text{ のとき})$$

$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $g(x)=\dfrac{px+q}{rx+s}$ とすると，

$$f(g(x))=\frac{a\cdot g(x)+b}{c\cdot g(x)+d}=\frac{a\dfrac{px+q}{rx+s}+b}{c\dfrac{px+q}{rx+s}+d}$$

$$=\frac{\boldsymbol{(ap+br)x+(aq+bs)}}{\boldsymbol{(cp+dr)x+(cq+ds)}} \cdots\cdots\cdots(*)$$

$$f^{-1}(x)=\frac{\boldsymbol{dx-b}}{\boldsymbol{-cx+a}}$$

確かに相性はよいのだが，生徒はその関連がピンとこなくて行列の使用を躊躇する。

§2. 記号⊙の導入

$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\odot(x)$ と書くことにする。

つまり，$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\odot(x)$

例えば，$\dfrac{x+2}{3x+4}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\odot(x)$,

$x=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\odot(x)$ である。

$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $g(x)=\dfrac{px+q}{rx+s}$ とすると，

$$f(g(x))=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\odot(g(x))$$

$$=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\odot\left(\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\odot(x)\right)$$

$(*)$ から，

$$f(g(x))=\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}\odot(x)$$

よって，最初の⊙は行列の積であるとしてよいことがわかる。

以後は，$f(g(x))=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\odot(x)$ とかける。

§3. 記号⊙に関する定理

この表記の定義から，

定理1　Aを2次の正方行列とするとき， $kA\odot(x)=A\odot(x)$ （kは0でない定数）

系　A, B を2次の正方行列，$A\odot(x)=B\odot(x)$ のとき，　$A=kB$ （kは定数）

定理2　$f(x)=A\odot(x)$ （$\det A \neq 0$）のとき， 逆関数：$f^{-1}(x)=A^{-1}\odot(x)$

【証明】　$f(g(x))=x$, $g(x)=B\odot(x)$ とおくと，

$AB\odot(x)=E\odot(x)$ （Eは単位行列）

定理系から，$AB=kE$　　よって　$B=kA^{-1}$

$\therefore$　$f^{-1}(x)=B\odot(x)=kA^{-1}\odot(x)=A^{-1}\odot(x)$　終

例　$f(x)=\dfrac{x+2}{3x+4}$ の逆関数は $\dfrac{4x-2}{-3x+1}$

例題　行列 A^n の計算法を既習として，つぎの有理形式の漸化式を解け。 $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{4a_n+1}{2a_n+3}$

【解答】　$a_{n+1}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\odot(a_n)$, $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$a_n=A\odot(a_{n-1})=A^2\odot(a_{n-2})=\cdots=A^{n-1}\odot(a_1)$$
$$=A^{n-1}\odot(2)$$

ここで，$A^n=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n+2\cdot5^n & -2^n+5^n \\ -2^{n+1}+2\cdot5^n & 2^{n+1}+5^n \end{pmatrix}$ （略）

$$A^{n-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{n-1}+2\cdot5^{n-1} & -2^{n-1}+5^{n-1} \\ -2^n+2\cdot5^{n-1} & 2^n+5^{n-1} \end{pmatrix}$$

定理1から，$\frac{1}{3}$ を削除して，

$$a_n=\frac{(2^{n-1}+2\cdot 5^{n-1})\cdot 2-2^{n-1}+5^{n-1}}{(-2^n+2\cdot 5^{n-1})\cdot 2+2^n+5^{n-1}}=\frac{5^n+2^{n-1}}{5^n-2^n}$$

答

§4. 生徒との想定問答

Q1：2次の正方行列と1次分数関数とは1：1の対応ではないのではないですか？

A1：その通りです。

2次の正方行列から1次分数関数へは「多：1」の対応がつきます。定理1でそのことは述べています。だから題目に曖昧に「相性」という言葉を選んだのです。例題の解の下から2行目；$\frac{1}{3}$ が取り除けて各成分の約分が可能となるのです。

Q2：1次分数関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ に対しては，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

を対応させると思いますが，なぜ新しい記号「$\odot$」を用いて，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\odot(x)$

を使用するのですか？

A2：この演算記号「$\odot$」の記法の方がよいのです。例えば，つぎの問題を考えてみます。

> **問題**　$f(x)=\dfrac{3x+4}{x+2}$，$g(x)=\dfrac{x-1}{2x+1}$ とするとき，g と f の合成関数：$(f\circ g)(x)=f(g(x))$　を求めよ。

行列の積は結合法則が成り立ちます。生徒によっては終わりの方から積の計算をするかもしれません。実際にやってみますと，

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ 2x+1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3(x-1)+4(2x+1) \\ 1(x-1)+2(2x+1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11x+1 \\ 5x+1 \end{pmatrix}$$

$\odot$を使うと，

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\odot(x)=\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\odot(x)$$

$$=\begin{pmatrix} 11x+1 \\ 5x+1 \end{pmatrix}$$

とかなりすっきりします。$\odot$の演算は最後にやって欲しいのです。

また，2次の正方行列の**積**と1次分数関数の**合成**は相性が良いと述べましたが，両者の**和**の相性は良くありません。

行列は分配法則：$AC+BC=(A+B)C$ が成り立ちますが，$\odot$では，

$A\odot(x)+B\odot(x)=(A+B)\odot(x)$ は成り立ちません。

（例えば，$A=B=E$（単位行列）とすると，

左辺$=E\odot(x)+E\odot(x)=x+x=2x$

右辺$=(E+E)\odot(x)=2E\odot(x)=E\odot(x)$

$=x$（定理1）　∴　左辺≠右辺

前記の例：$f(x)=\dfrac{3x+4}{x+2}$，$g(x)=\dfrac{x-1}{2x+1}$

において，質問者の記法を使うと，

$$f(x)+g(x)=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$=\dfrac{4x+3}{3x+3}$　とつい誤ってしまいます。

$\left[f(x)+g(x)=\dfrac{7x^2+12x+2}{(x+2)(2x+1)}\right.$ です。$\left.\right]$

Q3：外部テストや実際の入試において，このような$\odot$を用いた解法でも良いのですか？

A3：検算に使ってください。このような解法はまだ世間に周知されていません。

例題は実は'08年度東北大（後期）の問題を使いました。本物はリード問(1)，(2)があり当然それに従わなければなりません。もし，リード問の小問がなく，どういう解法でも良いときでも，これはまだ使ってはいけません。

どうしても使いたいときには，つぎのように$\odot$を定義して使ってください。

「$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\odot(x)$ と書くことにする。

2つの1次分数関数：$f(x)=F\odot(x)$，$g(x)=G\odot(x)$ とするとき，g と f の合成関数：$(f\circ g)(x)=(FG)\odot(x)$ となるから，」

とすれば読んでもらえると思います。

（東京都　十文字高等学校）